Examen (seconde session) - *Algèbre 2*

20 Juin 2017 - durée de l'épreuve : 3h

Le sujet est constitué de 5 exercices indépendants. Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous choisirez. Les documents et les calculatrices sont interdits.

Exercice 1.

Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et K un sous-groupe de G.

(1) Montrer que $HK = KH$ et que KH est un sous-groupe de G.

(2) Montrer que H est un sous-groupe distingué de KH et que $K \cap H$ est un sous-groupe distingué dans K.

(3) On considère l'application $f : K \to KH/H$ qui à tout élément $k \in K$ associe $f(k) = \bar{k}$, où $\bar{k} = kH$ est la classe de k modulo le sous-groupe H.

(a) Montrer que f est un morphisme de groupe surjectif.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = K \cap H$.

(c) En déduire que les groupes $K/(K \cap H)$ et KH/H sont isomorphes.

Exercice 2.

Un groupe G est dit *métacyclique* s'il existe un sous-groupe H de G cyclique, distingué dans G et tel que G/H est un groupe cyclique.

(1) Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe cyclique (engendré par a) d'ordre n et H un sous-groupe de G.

(a) Dire pourquoi H est distingué dans G.

(b) Montrer que H est cyclique.

(c) Montrer que G/H est cyclique.

(d) Conclure.

(2) On considère dans cette question le groupe de permutations $\mathcal{S}_3$.

(a) Dire pourquoi $\mathcal{S}_3$ n'est pas cyclique.

(b) Montrer que $\mathcal{S}_3$ est métacyclique (ind. on prend $H = \langle \sigma \rangle$, où σ est un 3-cycle de $\mathcal{S}_3$).

(3) Soit G un groupe métacyclique, c-à-d. il existe un sous-groupe H de G cyclique, distingué dans G et tel que G/H est un groupe cyclique. Soit K un sous-groupe de G.

(a) Montrer que $K \cap H$ est un sous-groupe cyclique et distingué de K.

(b) Montrer que $K/(K \cap H)$ est un groupe cyclique (Ind. on peut utiliser (3) (c) Exercice 1).

(c) Conclure.

Exercice 3.

Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre 360.

.../...

Exercice 4.

Soit G un groupe d'ordre 35 opérant sur un ensemble E de cardinal 19. On suppose que G ne fixe aucun élément de E. Combien y a-t-il d'orbites pour cette action?

Exercice 5.

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}] = \{a + ib\sqrt{7};\ \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

On note $(\mathbb{Z}[\sqrt{-7}])^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

(2) On pose pour tout $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$, $\theta(z) = z\bar{z} = |z|^2$, où $\bar{z}$ est le complexe conjugué de z dans $\mathbb{C}$.

Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{-7}])^* = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-7}];\ \theta(x) = 1\}$, déterminer alors $(\mathbb{Z}[\sqrt{-7}])^*$.

(3) Montrer que 2, $1 + i\sqrt{7}$ et $1 - i\sqrt{7}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

(4) Montrer que 2 n'est associé ni à $1 + i\sqrt{7}$ ni à $1 - i\sqrt{7}$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

(5) Montrer que 8 admet dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ deux décompositions en produit facteurs irréductibles. En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ n'est pas factoriel.

Barème indicatif : Exercice 1 (**7pt**), Exercice 2 (**7pt**), Exercice 3 (**2pt**)
Exercice 4 (**2pt**), Exercice 5 (**7pt**).

Un corrigé sera disponible à partir de 14h sur
`http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Khalid.Koufany/Algebre2/`