ACTIONS DE GROUPES

Chapitre 2

Table des matières

1. Actions de groupes 1
2. Orbites et stabilisateurs 3
3. Équation des classes, Formule de Burnside 6
4. Théorème de Cauchy 9
5. Théorème de Noether 10
6. Produit semi-direct 11

Dans ce chapitre, G désigne un groupe multiplicatif d'élément neutre e et E un ensemble non vide. L'ensemble des bijections de E sur E sera noté $\mathcal{S}(E)$ et on l'appellera **groupe des permutations** de E.

1. Actions de groupes

Définition 1.1. — *On dit que G* **opère à gauche** *sur E si on a une application*

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \to & E \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

vérifiant :

- $\forall x \in E,\ e \cdot x = x$;
- $\forall g, g' \in G,\ \forall x \in E,\ g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$.

Une telle application est aussi appelée **action à gauche** *du groupe G sur l'ensemble E.*

On peut définir de manière analogue la notion d'action à droite :

Définition 1.2. — *On dit que* G **opère à droite** *sur* E *si on a une application*

$$\begin{array}{rcl} G \times E & \to & E \\ (g,x) & \mapsto & x \cdot g \end{array}$$

vérifiant :

- $\forall x \in E,\ x \cdot e = x$;
- $\forall g, g' \in G,\ \forall x \in E,\ (x \cdot g) \cdot g' = x \cdot (gg')$.

Une telle application est aussi appelée **action à droite** *du groupe* G *sur l'ensemble* E.

Remarque 1.3. — Supposons que G opère à gauche sur E. Pour $g \in G$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi(g): & E & \to & E \\ & x & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

est alors une bijection de E sur E, c'est-à-dire $\varphi(g) \in \mathcal{S}(E)$. En effet, de $e \cdot x = x$ pour tout $x \in E$, on déduit que $\varphi(e) = Id_E$ et avec $g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (gg^{-1}) \cdot x = e \cdot x = x$ et $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$, on déduit que $\varphi(g) \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g^{-1}) \circ \varphi(g) = Id_E$, ce qui signifie que $\varphi(g)$ est bijective d'inverse $\varphi(g^{-1})$.

De plus avec $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$, pour tous g, g', x, on déduit que $\varphi(gg') = \varphi(g) \circ \varphi(g')$, c'est-à-dire que l'application φ est un morphisme de groupes de G dans $\mathcal{S}(E)$. Le noyau de ce morphisme est le noyau de l'action à gauche de G sur E.

Réciproquement, un tel morphisme φ définit une action à gauche de G sur E de la manière suivante

$$g \cdot x = \varphi(g)(x).$$

Exemple 1.4. —

1. G agit sur lui même par **translations à gauche** :

$$(g,h) \in G \times G \mapsto g \cdot h = gh \in G.$$

2. G agit sur lui même par **conjugaisons** :

$$(g,h) \in G \times G \mapsto g \cdot h = ghg^{-1} \in G.$$

3. Un groupe G agit sur tout sous-groupe distingué H par conjugaisons

$$(g,h) \in G \times H \mapsto g \cdot h = ghg^{-1} \in H.$$

4. Le groupe des permutations $\mathcal{S}(E)$ agit naturellement sur E par

$$(\sigma, x) \in \mathcal{S}(E) \times E \mapsto \sigma \cdot x = \sigma(x) \in E.$$

2. Orbites et stabilisateurs

Définition 2.1. — *Soit G un groupe opérant sur un ensemble non vide E. Pour tout $x \in E$, le sous-ensemble de E*

$$G \cdot x = \{g \cdot x \ ; \ g \in G\},$$

est appelé **orbite** *de x sous l'action de G. On le note parfois $\mathcal{O}_x$.*

On considère la relation définie sur E par

$$x \mathcal{R} y \iff \exists g \in G, \ \ y = g \cdot x.$$

Pour tout $x \in E$, on a $x = e \cdot x$, donc $x \mathcal{R} x$.
Si $x \mathcal{R} y$, il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$, ou encore $x = g^{-1} \cdot y$ d'où $y \mathcal{R} x$.
Si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, alors $y = g_1 \cdot x$ et $z = g_2 \cdot y$, pour $g_1, g_2 \in G$. Donc $z = g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x$, d'où $x \mathcal{R} z$.
Par conséquent, la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E. La classe d'un élément $x \in E$ est

$$\bar{x} = \{y \in E \ , \ x \mathcal{R} y\} = \{y \in E, \ \exists g \in G, \ y = g \cdot x\} = G \cdot x.$$

La classe de x pour cette relation coïncide donc avec l'orbite de x sous l'action de G. On en déduit (d'après le chapitre 1) que **les orbites forment une partition** de E,

$$E = \bigsqcup_{x \in E} G \cdot x.$$

Exemple 2.2. —

1. Pour l'action de $\mathcal{S}(E)$ sur E, il y a une seule orbite. En effet, pour tout $x \in E$ on a
$$\mathcal{S}(E) \cdot x = \{\sigma(x), \ \sigma \in \mathcal{S}(E)\} = E,$$
puisque pour tout $y \in E$, $y = \tau(x)$, où τ est la transposition $\tau = (x, y)$ si $y \neq x$ et $\tau = Id_E$ si $y = x$.
2. Pour l'action de G sur lui même par conjugaisons, les orbites sont appelée **classes de conjugaison** :
$$\forall h \in G, \ G \cdot h = \{ghg^{-1}, \ g \in G\}.$$
Le groupe G est abélien si, et seulement si, $G \cdot h = \{h\}$ pour tout $h \in G$.
3. Si H est un sous-groupe de G, il agit par translations à droite sur G :
$$(h, g) \in H \times G \mapsto h \cdot g = gh^{-1} \in G.$$
Pour tout $g \in G$, l'orbite de g est la classe modulo H :
$$H \cdot g = \{h \cdot g, \ h \in H\} = \{gh^{-1}, \ h \in H\} = \{gk, \ k \in H\} = gH.$$

L'ensemble de ces orbites est alors l'ensemble quotient G/H des classes à gauche modulo H.
On peut de même définir l'action de H sur G par translation à gauche

$$(h, g) \in H \times G \mapsto h \cdot g = hg \in G,$$

les orbites sont les classes à droite modulo H

$$H \cdot g = \{hg,\ h \in H\} = Hg.$$

4. Pour tout entier $n \geq 1$, le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ agit naturellement sur $\mathbb{R}^n$,
$$\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ A \cdot x = A(x).$$
L'orbite de $x \in \mathbb{R}$ est la sphère centrée en 0 et de rayon $\|x\|$: en effet,
$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot x = \{A(x),\ A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}.$$
Pour tout $y \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot x$, il existe $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $y = A(x)$ et $\|y\| = \|A(x)\| = \|x\|$, donc $y \in S(0, \|x\|)$. Réciproquement, si $y \in S(0, \|x\|)$ avec $x \neq 0$, on a $y \neq 0$ et on peut construire deux bases orthonormées $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ avec $e_1 = \frac{1}{\|x\|}x$ et $e'_1 = \frac{1}{\|y\|}y$. La matrice de passage A de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est alors orthogonale et $y = \|y\|e'_1 = \|x\|A(e_1) = A(\|x\|e_1) = A(x)$, donc $y \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot x$. Pour $x = 0$, on a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot 0 = \{0\} = S(0, 0)$.
5. Pour des entiers $n \geq 1$, $m \geq 1$, on considère l'action du groupe $G = GL_n(\mathbb{R}) \times GL_m(\mathbb{R})$ sur l'ensemble $E = \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ des matrices rectangulaines $n \times m$ définie par
$$\forall (P, Q) \in G,\ \forall A \in E,\ \ (P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}.$$
Les orbites de cette action sont les ensembles
$$\mathcal{O}_r = \{A \in E,\ \mathrm{rg}(A) = r\}$$
où r est un entier compris entre 0 et $\min(n, m)$. (Voir TD, feuille 2)

Définition 2.3. — *On dit que l'action de G sur E est* **transitive** *(reps.* **simplement transitive***) si pour tout $x, y \in E$, il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$ (reps. pour tout $x, y \in E$, il existe un unique $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$).*

Dans le cas d'une action transitive ou simplement transitive, il y a une seule orbite, à savoir E.

Définition 2.4. — *On dit que l'action de G sur E est* **fidèle** *si le morphisme de groupes*

$$\varphi : g \in G \mapsto \varphi(g) : x \mapsto g \cdot x \in \mathcal{S}(E)$$

est injectif. Autrement dit, pour $g \in G$,

$$(\forall x \in E,\ \ g \cdot x = x) \iff g = e.$$

Une action fidèle permet d'identifier G à un sous-groupe de $\mathcal{S}(E)$.

***Théorème 2.5* (Cayley).** — *L'action de G sur lui même par translation à gauche est fidèle et G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}(G)$.*

Démonstration. — Pour $g \in G$, on a $g \cdot h = gh = h$ pour tout $h \in G$ si, et seulement si, $g = e$, donc φ est injectif. □

Définition 2.6. — *Soit G opérant sur un ensemble non vide E. Pour tout $x \in E$, le sous-ensemble de G*

$$G_x = \{g \in G,\ g \cdot x = x\},$$

est le **stabilisateur** *de x sous l'action de G.*

On vérifie facilement que ces stabilisateurs G_x sont des sous-groupes de G (en général non distingués).

Théorème 2.7. — *Soit G un groupe opérant sur un ensemble non vide E. Pour tout $x \in E$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x : & G/G_x & \to & G \cdot x \\ & \bar{g} = gG_x & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

est bien définie et bijective. Dans le cas où G est fini, on a

$$\operatorname{card}(G \cdot x) = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|} \tag{1}$$

donc le cardinal de toute orbite $G \cdot x$ divise l'ordre de G.

Démonstration. — Soit $\bar{g} \in G/G_x$ et soient g_1, g_2 deux représentants de $\bar{g}$. Donc $\bar{g_1} = \bar{g}_2 = \bar{g}$ et $g_2^{-1} g_1 \in G_x$. Par conséquent, $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$. Cela signifie que l'application φ_x est bien définie.

Pour tout $g, h \in G$, l'égalité $g \cdot x = h \cdot x$ équivaut à $(h^{-1}g) \cdot x = x$, soit $h^{-1}g \in G_x$ ou encore $\bar{g} = \bar{h}$ dans G/G_x. On déduit que l'application φ_x est bien injective. La surjectivité étant évidente, l'ensemble quoteint G/G_x est donc en bijection avec l'orbite $G \cdot x$. Dans le cas où le groupe G est fini, on a

$$\operatorname{card}(G \cdot x) = \operatorname{card}(G/G_x) = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

□

Exemple 2.8. — Soit E un ensemble non vide de cardinal n. L'action $\mathcal{S}(E)$ sur E est transitive (il y a une seule orbite), donc $\mathcal{S}(E) \cdot x = E$ pour tout $x \in E$. Le stabilisateur de $x \in E$ est $\mathcal{S}(E)_x = \{\sigma \in \mathcal{S}(E),\ \sigma(x) = x\}$ et

l'application qui associe à $\sigma \in S(E)_x$ sa restriction à $F = E \setminus \{x\}$ réalise un isomorphisme de $S(E)_x$ sur $S(F)$. On a donc $\mathrm{card}(S(E)_x) = \mathrm{card}(S(F))$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(S(E)) &= \mathrm{card}(S(E)\cdot x)\ \mathrm{card}(S(E)_x) \\ &= \mathrm{card}(E)\ \mathrm{card}(S(F)) = n\ \mathrm{card}(S(F)) \end{aligned}$$

On conclut alors par récurrence que $\mathrm{card}(S(E)) = n!$.

3. Équation des classes, Formule de Burnside

Théorème 3.1. — *Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E. En notant $G\cdot x_1, \ldots, G\cdot x_r$ toutes les orbites deux à deux distinctes, on a*

$$\mathrm{card}(E) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{card}(G\cdot x_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|G_{x_i}|} \quad \text{(Equation des classes)} \tag{2}$$

et le nombre d'orbites est donné par

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \mathrm{card}(\mathrm{Fix}(g)) \quad \text{(Formule de Burnside)} \tag{3}$$

où $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in E,\ g\cdot x = x\}$.

Démonstration. — Comme E est fini, on a un nombre fini d'orbites $G\cdot x_1, \ldots, G\cdot x_r$ qui forment une partition de E. Donc

$$\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(\cup_{i=1}^{r} G\cdot x_i) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{card}(G\cdot x_i)$$

En utilisant la bijection de G/G_{x_i} sur $G\cdot x_i$, on déduit que

$$\mathrm{card}(E) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{card}(G\cdot x_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|G_{x_i}|}$$

d'où l'equation des classes.

Pour montrer la formule de Burnside, il suffit de calculer de deux façons le cardinal de l'ensemble

$$F = \{(g,x) \in G\times E\ ;\ g\cdot x = x\}$$

On a, d'une part,

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(F) &= \textstyle\sum_{g\in G} \sum_{x\in E} \mathrm{card}\{(g,x)\ ;\ g\cdot x = x\} \\ &= \textstyle\sum_{g\in G} \mathrm{card}(\mathrm{Fix}(g)). \end{aligned}$$

D'autres part,

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(F) &= \sum_{x\in E}\operatorname{card}(G_x) = \sum_{x\in E}\frac{|G|}{\operatorname{card}(G\cdot x)}\\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{x\in G\cdot x_i}\frac{|G|}{\operatorname{card}(G\cdot x)}\\ &= |G|\sum_{i=1}^{r}\sum_{x\in G\cdot x_i}\frac{1}{\operatorname{card}(G\cdot x)}\\ &= |G|\sum_{i=1}^{r}1 \quad (\text{car } G\cdot x = G\cdot x_i)\\ &= r\,|G|\,.\end{aligned}$$

D'où la formule de Burnside. □

Remarque 3.2. — Si G est un groupe opérant sur un ensemble E, on note alors

$$\operatorname{Fix}(G) = \{x \in E,\ G\cdot x = \{x\}\},$$

l'ensemble des éléments de E dont l'orbite est réduite à un point.
En séparant dans la formule des classes les orbites réduites à un point des autres, celle-ci s'écrit :

$$\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(\operatorname{Fix}(G)) \ + \sum_{\substack{i=1\\ \operatorname{card}(G\cdot x_i)\geq 2}}^{r}\frac{|G|}{|G_{x_i}|}, \tag{4}$$

la somme étant nulle si toutes les orbites sont réduites à un point.

Définition 3.3. — *Soit $p \geq 2$ un nombre premier. On appelle* **p-groupe** *tout groupe d'ordre p^α, où α est un entier naturel non nul.*

Corollaire 3.4. — *Si $p \geq 2$ est un nombre premier et G un p-groupe opérant sur un ensemble fini E, alors*

$$\operatorname{card}(\operatorname{Fix}(G)) \equiv \operatorname{card}(E) \mod p.$$

Démonstration. — Notons $|G| = p^\alpha$ avec $\alpha \geq 1$. Si $G\cdot x_i$ est une orbite non réduite à un point (s'il en existe), alors

$$2 \leq \operatorname{card}(G\cdot x_i) = \frac{|G|}{|G_{x_i}|}.$$

On en déduit qu'il existe un entier β_i, $0 \leq \beta_i < \alpha$ tel que $|G_{x_i}| = p^{\beta_i}$ et $\operatorname{card}(G\cdot x_i) = p^{\alpha-\beta_i}$ avec $1 \leq \alpha - \beta_i \leq \alpha$. Il en résulte que

$$\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(\operatorname{Fix}(G)) \ + \sum_{\substack{i=1\\ \operatorname{card}(G\cdot x_i)\geq 2}}^{r}\operatorname{card}(G\cdot x_i) \equiv \operatorname{card}(\operatorname{Fix}(G)) \mod p$$

□

Corollaire 3.5. — *Soit G un groupe fini que l'on fait agir sur lui même par conjugaisons ($g \cdot h = ghg^{-1}$ pour $(g,h) \in G \times G$). En notant $G \cdot h_1, \dots, G \cdot h_r$ toutes les orbites deux à deux distinctes, on a*

$$\begin{aligned} |G| &= |Z(G)| + \sum_{\substack{i=1 \\ \mathrm{card}(G \cdot h_i) \geq 2}}^{r} \mathrm{card}(G \cdot h_i) \\ &= |Z(G)| + \sum_{\substack{i=1 \\ \mathrm{card}(G \cdot x_i) \geq 2}}^{r} \frac{|G|}{|G_{h_i}|}, \end{aligned}$$

où $Z(G)$ est le centre de G.

Démonstration. — Une orbite $G \cdot h$ est réduite à un point si et seulement si $G \cdot h = \{h\}$, ou encore $ghg^{-1} = h$ pour tout $g \in G$, ce qui signifie $h \in Z(G)$. Ainsi $\mathrm{Fix}(G) = Z(G)$. Le corollaire se déduit alors de la formule (4). □

Exemple 3.6. — *Soit G un groupe d'ordre 21 qui agit sur un ensemble E à 20 éléments. On suppose que G ne fixe aucun élément de E. Combien y a-t il d'orbites pour cette action?*

Si $\mathcal{O}$ est une orbite de l'action de G sur E, alors $\mathbf{card}(\mathcal{O})$ *divise* $|G| = 21$. *Donc* $\mathbf{card}(\mathcal{O}) \in \{1, 3, 7, 21\}$. *Comme G ne fixe aucun élément de E,* $\mathbf{card}(\mathcal{O}) \neq 1$. *Les orbites étant une partiction de E, donc* $\mathbf{card}(\mathcal{O}) \neq 21$ *(car $21 > 20$). Soit n le nombre d'orbites de cardinal 3 et m le nombre d'orbites de cardinal 7. On a alors (équation des classes) $3n + 7m = 20$. Modulo 3 cette équation est réduite à $m \equiv 2[3]$ et modulo 7 elle est réduite à $n \equiv 2[7]$. Donc les seuls valeurs possibles sont $n = 2$ et $m = 2$. Il y donc deux orbites à 3 éléments et deux orbites à 7 éléments.*

Théorème 3.7. — *Soit G un p-groupe, d'ordre p^α. Alors $|Z(G)| \geq p$.*

Démonstration. — Soit G un groupe d'ordre $|G| = p^\alpha$. D'après les deux corollaires précédents, on a

$$|Z(G)| = \mathrm{card}(\mathrm{Fix}(G)) \equiv |G| \mod p.$$

Comme $|G| \geq 1$, on conclut que $|Z(G)| \geq p$ et que $Z(G)$ est non trivial. □

Théorème 3.8. — *Tout groupe d'ordre p^2 avec p un nombre premier est abélien.*

Démonstration. — Comme $Z(G)$ est un sous-groupe de G, on a d'après le théorème de Lagrange $|Z(G)| \in \{1, p, p^2\}$. D'après théorème 3.7 on a $|Z(G)| \neq 1$, donc $|Z(G)| = p$ ou $|Z(G)| = p^2$.
Supposons $|Z(G)| = p$. Sit $x \in G \setminus Z(G)$. On considère encore l'action de G sur lui même par conjugaison. D'une part, $x \in G_x$, d'autre part $Z(G) \subset G_x$. Donc $|G_x| \geq p + 1$. Or d'après le théorème de Lagrange, $|G_x|$ divise p^2, donc

$G_x = G$ ce qui conduit à la contradiction $x \in Z(G)$. Ainsi $|Z(G)| = p^2$ et par suite $Z(G) = G$, autrement dit G est abélien. □

4. Théorème de Cauchy

Soit G un groupe fini d'orde $n \geq 2$ et p un nombre premier. On pose

$$E = \{(g_1, g_2, \dots, g_p) \in G^p \ ; \ g_1 g_2 \cdots g_p = e\}.$$

L'application $(g_1, \dots, g_{p-1}) \mapsto (g_1, \dots, g_{p-1}, (g_1 \cdots g_{p-1})^{-1})$ réalise une bijection de G^{p-1} sur E, donc

$$\text{card}(E) = n^{p-1}.$$

Considérons $H = \langle \sigma \rangle = \{Id, \sigma, \dots, \sigma^{p-1}\}$ le sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_p$ engendré par le p-cycle $\sigma = (1, 2, \dots p)$. On fait agir H sur E par

$$\sigma^k \cdot (g_1, \dots, g_p) = (g_{\sigma^k(1)}, \dots, g_{\sigma^k(p)}) \tag{5}$$

Pour $(g_1, \dots, g_p) \in E$, on a $g_2 \cdots g_p g_1 = g_1^{-1} g_1 = e$, donc

$$(g_{\sigma(1)}, \dots, g_{\sigma(p)}) = (g_2, \dots, g_p, g_1) \in E.$$

Il en résulte que pour tout entier k, $0 \leq k \leq p-1$, $(g_{\sigma^k(1)}, \dots, g_{\sigma^k(p)}) \in E$ et l'application (5) est bien définie. Cette application définit bien une action puisque

$$Id \cdot (g_1, \dots, g_p) = (g_1, \dots, g_p)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma^j \cdot (\sigma^k \cdot (g_1, \dots, g_p)) &= \sigma^j \cdot (g_{\sigma^k(1)}, \dots, g_{\sigma^k(p)}) \\ &= (g_{\sigma^{j+k}(1)}, \dots, g_{\sigma^{j+k}(p)}) \\ &= \sigma^{j+k} \cdot (g_1, \dots, g_p) = (\sigma^j \circ \sigma^k) \cdot (g_1, \dots, g_p). \end{aligned}$$

Lemme 4.1. — *On*

$$\text{Fix}(H) = \{x \in E \ ; \ H \cdot x = \{x\}\} \neq \emptyset$$

et $\text{card}(\text{Fix}(H))$ *est divisible par* p *si* p *est un diviseur premier de* n.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $x = (e, \dots, e)$ est dans $\text{Fix}(H)$ pour déduire que $\text{Fix}(H)$ est non vide. Comme H est un p-groupe (il est d'ordre p) on a d'après le corollaire 3.4,

$$\text{card}(\text{Fix}(H)) \equiv \text{card}(E) \mod p$$

avec $\text{card}(E) = n^{p-1}$ divisible par p comme n, ce qui entraîne que $\text{card}(\text{Fix}(H))$ est également divisible par p. □

***Théorème 4.2* (Cauchy)**. — *Si* G *est un groupe fini d'ordre* $n \geq 2$, *alors pour tout diviseur premier* p *de* n, *il existe dans* G *un élément d'ordre* p *(et donc un sous-groupe d'ordre* p*).*

Démonstration. — On utilise les notations ci-dessus.
De $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(H)) \geq 1$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(H))$ divisible par p, on déduit que $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(H)) \geq p \geq 2$ et en remarquant que $(g_1, \ldots, g_p) \in \mathrm{Fix}(H)$ équivaut à dire que $g_1 = g_2 = \ldots g_p = g$ avec $g \in G$ tel que $g^p = e$, on déduit qu'il existe $g \neq e$ tel que $g^p = e$, ce qui signifie que g est d'ordre p. □

5. Théorème de Noether

(a) Soit G un groupe. On fait agir G sur l'ensemble de ses sous-groupes par conjugaison :

$$\forall g \in G, \forall H \leq G, \;\; g \cdot H = gHg^{-1}.$$

Le stabilisateur d'un sous-groupe H pour cette action sera noté N_H,

$$N_H = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

et sera appelé, le **normalisateur** de H dans G. C'est un sous-groupe de G, il contient H et on a $H \triangleleft N_H$.

***Théorème 5.1* (Théorème de Noether).** — *Soient G un groupe, H, K deux sous-groupes de G tels que $K \subset N_H$.*

(a) On a $HK = KH$ et c'est le sous-groupe de G engendré par H et K.

(b) $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de K et H est un sous-groupe distingué de HK.

(c) Les groupes HK/H et $K/(H \cap K)$ sont isomorphes.

Démonstration. — Soit $h \in H$ et $k \in K$. On a $hk = k(k^{-1}hk) \in KH$ car $K \subset N_H$. De même $kh = (khk^{-1})k \in KH$. On a donc $HK = KH$.

De plus, HK est un sous-groupe de G car pour tous $h, h' \in H$ et pour tous $k, k' \in K$. Comme $kh' \in KH = HK$, il existe $h'' \in H$ et $k'' \in K$ tels que $kh' = h''k''$. D'où

$$(hk)(h'k') = h(kh')k' = h(h''k'')k = (hh'')(k''k') \in HK.$$

D'autre part,

$$(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH = HK.$$

Le sous-groupe HK contient à la fois H et K, il contient donc le sous-groupe engendré par H et K. Or ce sous-groupe contient tous les éléments hk de HK, par conséquent, il est égal à HK. Ainsi HK est le sous-groupe engendré par H et K.

(b) Pour $h \in H \cap K$ et $k \in K$, on a $khk^{-1} \in H$ car $K \subset N_H$ et $khk^{-1} \in K$ car K est un sous-groupe de G. Ainsi $khk^{-1} \in H \cap K$ et $H \cap K$ est distingué dans K.

Comme H est distingué dans N_H, il est distingué dans HK puisque $H \subset HK \subset N_H$.

(c) Considérons la surjection canonique $p : HK \to HK/H$ qui associe à tout $x \in HK$ la classe $\bar{x}$ de x modulo H. Soit $f = p_{|_K}$ la restriction de p à K. Alors f est un morphisme de groupes de K dans HK/H. Ce morphisme est surjectif car tout element de HK/H est de la forme $\overline{hk} = \bar{h}\bar{k} = \bar{e}\bar{k} = \bar{k}$. De plus si $k \in K$ alors

$$k \in \mathbf{Ker}\, f \iff \bar{k} = \bar{e} \iff k \in H \iff k \in H \cap K$$

Donc $\mathbf{Ker}\, f = H \cap K$. Par factorisation de f à travers son noyau, on obtient un isomorphisme de $K/(H \cap K)$ sur HK/H.

□

Remarques 5.2. — (a) En notation additive, l'isomorphisme de Noether s'écrit

$$(H + K)/K \simeq K/(H \cap K).$$

(b)

Corollaire 5.3. — *Soit G un groupe d'ordre p^2 où p est un nombre premier. Alors, soit $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ soit $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.*

Démonstration. — Soit $x \in G$, alors $o(x) \in \{1, p, p^2\}$.

Si il existe $x \in G$ tel que $o(x) = p^2$, alors G est cyclique d'ordre p^2 et donc $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Sinon, pour tout $x \in G$, $x \neq e$, on a $o(x) = p$. Soit alors $x \in G \setminus \{e\}$ et posons $H = \langle x \rangle$. On a $H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Comme H est un sous-groupe propre de G, il existe $y \in G \setminus H$. On pose alors $K = \langle y \rangle$. D'après le théorème 3.8 (tout groupe d'ordre p^2 est abélien), G est abélien et donc $N_H = G$. De plus comme $y \notin H$, $H \cap K = \{e\}$. On a alors $K \subset N_H$ et d'après le théorème de Noether $K \simeq K/(H \cap K) \simeq HK/H$, donc $p = \frac{|HK|}{p}$ et $|HK| = p^2$. On en déduit que

$$G = HK \simeq H \times K \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

□

6. Produit semi-direct

Ce paragraphe n'est plus au programme, vous pouvez toutefois le consulter pour votre culture personnelle.

Soient K et H deux groupes et supposons que K opère sur H,

$$\begin{array}{ccc} K \times H & \to & H \\ (k, h) & \mapsto & k \cdot h \end{array}$$

D'après la remarque 1.3, pour tout $k \in K$

$$\alpha_k : \begin{array}{ccc} H & \to & H \\ h & \mapsto & k \cdot h \end{array}$$

est une bijection de H sur H, $\alpha_k \in \mathcal{S}(H)$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & K & \to & \mathcal{S}(H) \\ & k & \mapsto & \alpha_k \end{array}$$

le morphisme de groupes associé à cette action.

Si pour tout $k \in K$, α_k est un automorphisme de H, $\alpha_k \in Aut(H)$, alors l'action de K sur H vérifie la condition supplémentaire

$$\forall k \in K,\ \forall h, h' \in H,\ \ \alpha_k(hh') = \alpha_k(h)\alpha_k(h') \tag{6}$$

On dira alors $\alpha : k \mapsto \alpha_k$ est une action par automorphismes du groupe K sur le groupe H.

Réciproquement, tout action de K sur H vérifiant la condition (6) est telle que, pour tout $k \in K$, $\alpha_k \in Aut(H)$ c'est-à-dire que

$$\text{la condition (6)} \iff \mathbf{Im}(\alpha) \leq Aut(H).$$

Exemple 6.1. — (1) Soit G un groupe considéré comme opérant sur lui même par conjugaison

$$\begin{array}{rccc} G \times G & \to & G \\ (g, h) & \mapsto & g \cdot h = ghg^{-1} \end{array}$$

Pour tout $g \in G$ et tout $h \in G$, on a $\alpha_g(h) = ghg^{-1}$, donc $\alpha_g \in Aut(G)$. La condition (6) est donc vérifiée.

(2) On remarquera que l'action d'un groupe G sur lui même par translations à gauche

$$\begin{array}{rccc} G \times G & \to & G \\ (g, h) & \mapsto & g \cdot h = gh \end{array}$$

ne vérifie pas la condition (6), puisqu'une translation de G n'est pas un automorphisme, en général.

(3) Soient $(A, +, \times)$ un anneau unitaire et $A^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A. Considérons l'action du groupe $A^\times$ sur le groupe abélien $(A, +)$,

$$\begin{array}{rccc} A^\times \times (A, +) & \to & (A, +) \\ (u, a) & \mapsto & u \cdot a = ua \end{array}$$

Cette action vérifie la condition (6), puisque $\alpha_u \in Aut((A, +))$ pour tout $u \in A^\times$.

(4) Soit H un groupe et soit K un sous-groupe de $Aut(H)$. Alors K opère sur H par

$$\begin{array}{rccc} K \times H & \to & H \\ (k, h) & \mapsto & k \cdot h = k(h) \end{array}$$

et $\alpha_k = k$ pour tout $k \in K$, autrement dit $\mathbf{Im}(\alpha) \leq Aut(H)$. La condition (6) est donc vérifiée.

Proposition 6.2 **(Produit semi-direct de groupes)**
Soit $\alpha : k \mapsto \alpha_k$ une action par automorphismes d'un groupe K sur un autre groupe H. Alors $G := H \times K$ muni de la loi de composition interne définie par

$$(h,k)(h',k') = (h\alpha_k(h'), kk') \tag{7}$$

est un groupe non abélien, en général.
Les applications $f : h \mapsto (h, e_K)$ et $g : k \mapsto (e_H, k)$ sont des morphismes injectifs de H et K sur les sous-groupes $H' = H \times \{e_K\}$ et $K' = \{e_H\} \times K$ de G et on a

$$H' \triangleleft G,\ H' \cap K' = \{e\},\ H'K' = G.$$

Démonstration. — On a $\alpha_{e_K} = Id_H$ car $\alpha \in Hom(K, Aut(H))$. Pour tout $k \in K$, on a $\alpha_k(e_H) = e_H$ car $\alpha_k \in Aut(H)$. On en déduit que pour tout $(h,k) \in H \times K$

$$(h,k)(e_H, e_K) = (h\alpha_k(e_H), ke_K) = (h,k),$$

et

$$(e_H, e_K)(h,k) = (e_H\alpha_{e_K}(h), e_K k) = (h,k).$$

Ainsi $e := (e_H, e_K)$ est un élément neutre de G. La loi de composition est associative. En effet, comme $\alpha_{kk'} = \alpha_k \circ \alpha_{k'}$, les expressions suivantes sont égales

$$[(h,k)(h',k')](h'',k'') = (h\alpha_k(h'), kk')(h'',k'') = (h\alpha_k(h')\alpha_{kk'}(h''), kk'k'')$$

$$(h,k)[(h',k')(h'',k'')] = (h,k)(h'\alpha_{k'}(h''), k'k'') = (h\alpha_k[h'\alpha_{k'}(h'')], kk'k'').$$

On vérifie aussi que tout $(h,k) \in G$ a pour inverse $(\alpha_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1})$. Donc $G = H \times K$ est un groupe.

Les applications injectives f et g sont des morphismes car

$$f(h)f(h') = (h, e_K)(h', e_K) = (h\alpha_{e_K}(h'), e_K) = (hh', e_K) = f(hh')$$

$$g(k)g(k') = (e_H, k)(e_H, k') = (e_H\alpha_k(e_H), kk') = (e_H, kk') = g(kk').$$

Soit $(h', e_K) \in H'$ et $(h,k) \in G$, on a

$$\begin{aligned}(h,k)(h',e_K)(h,k)^{-1} &= (h\alpha_k(h'), k)(\alpha_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1}) \\ &= (h\alpha_k(h')h^{-1}, e_K) \in H'\end{aligned}$$

Donc $H' \triangleleft G$. On en déduit que $H'K'$ est un sous-groupe de $G = H \times K$. D'autre part, tout $(h,k) \in G$ s'écrit $(h,k) = (h, e_K)(e_H, k)$. Par conséquent $G = H'K'$. La dernière affirmation, $H' \cap K' = \{e\}$, est claire. □

Définition 6.3. — *Ce groupe G est appelé le* **produit semi-direct** *associé à l'action α de K sur H (ou produit semi-direct de H par K). On le note $H \rtimes_\alpha K$.*

Proposition 6.4 **(Produit semi-direct de sous-groupes)**
Soient G un groupe et H et K deux sous-groupes de G tels que

$$H \triangleleft G,\ H \cap K = \{e\},\ HK = G.$$

Alors $f : (h,k) \mapsto hk$ de $H \times K$ dans G est un isomorphisme du produit semi-direct $H \rtimes_\alpha K$ sur G, où α désigne l'action de K sur H par automorphisme intérieurs, $\alpha : k \mapsto \mathrm{Ad}_{k|H}$.

Démonstration. — Tout automorphisme intérieur $\mathrm{Ad}_k : g \mapsto kgk^{-1}$ de G laisse stable H car $H \triangleleft G$. Il induit par restriction un automorphisme $\alpha_k = \mathrm{Ad}_{k|H}$ de H. Ainsi $\mathbf{Im}(\alpha) \leq Aut(H)$ et la propriété (6) est vérifiée. On en déduit que $H \rtimes_\alpha K$ est un produit semi-direct.

L'application f est surjective puisque $HK = G$. Si $hk = h'k'$, alors $kk'^{-1} = h^{-1}h' \in H \cap K = \{e\}$ et par suite $h = h'$ et $k = k'$. Cela prouve que f est injective et donc bijective. Pour tous $(h,k),(h',k') \in H \rtimes_\alpha K$, on a

$$\begin{aligned} f(h,k)f(h',k') &= hkh'k' = hkh'k^{-1}kk' = h\alpha_k(h')kk' \\ &= f(h\alpha_k(h'), kk') = f((h,k)(h',k')). \end{aligned}$$

On en déduit que f est un isomorphisme du groupe $H \rtimes_\alpha K$ sur G. □

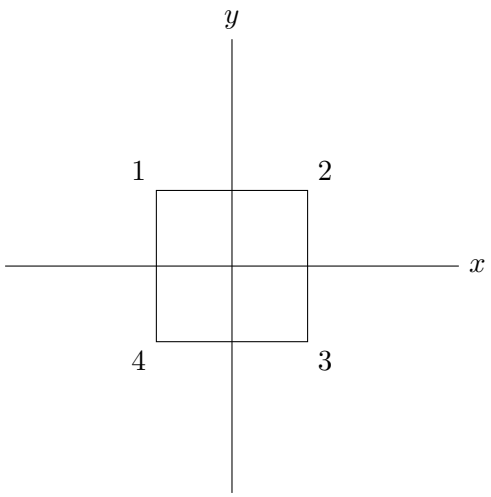
Définition 6.5. — *Soient G un groupe et H et K deux sous-groupes. On dira que G est* **produit semi-direct** *de H par K si*
(a) $H \triangleleft G$
(b) $H \cap K = \{e\}$
(c) $HK = G$.

Définition 6.6. — *Etant donné un groupe G et $H \triangleleft G$, s'il existe un sous-groupe K de G tel que G est produit semi-direct de H par K, alors K est appelé* **complément** *de H dans K. Dans ce cas, l'application du théorème de l'isomorphisme donne $G/H \simeq K$.*

Remarque 6.7. — L'intérêt de la notion de produit semi-direct de groupes est de fournir une méthode de construction de nouveaux groupes, à partir de groupes connus.

Par analogie avec le cas d'un groupe K opérant sur un groupe H, de telle sorte que le morphisme $\alpha : K \to \mathcal{S}(H)$ associé à cette action vérifie la conidtion $\mathbf{Im}(\alpha) \leq Aut(H)$, on peut envisager l'action d'un groupe G opérant sur un ensemble E muni d'une structure algébrique autre que celle de groupe. En particulier si E est un espace vectoriel, si G opère sur E de telle sorte que le morphisme $\rho : G \to \mathcal{S}(E)$ associé à cette action vérifie la condition $\mathbf{Im}(\rho) \leq Aut(E) = GL(E)$, alors le couple (ρ, E) définit ce qu'on appelle **une représentation linéaire de** G.

Exemple 6.8 **(Groupe diédral)**. — On considère le carrée ci-dessous avec de sommets numérotés 1, 2, 3 et 4, centré à l'origine des axes (x) et (y)



Doit D_4 l'ensemble des transformations du carrée,

$$D_4 \quad = \quad \{Id, R, R^2, R^3, T_x, T_y, T_{1,3}, T_{2,4}\}$$

où
$\rightarrow$ R est la rotation (dans le sens trigonométrique) d'angle $\frac{\pi}{2}$ (donc R^2 est la rotation d'angle π et R^3 est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ et $R^4 = I$ est la rotation d'angle 2π);
$\rightarrow$ T_x la réflexion par rapport à l'axe (x);
$\rightarrow$ T_y la réflexion par rapport à l'axe (y);
$\rightarrow$ $T_{1,3}$ la réflexion par rapport à la diagonale $(1,3)$;
$\rightarrow T_{2,4}$ la réflexion par rapport à la diagonale $(2,4)$.

D_4 est un groupe d'ordre 8 appelé groupe des symétries du carrée et sa table de multiplication est

	I	R	R^2	R^3	T_x	$T_{2,4}$	T_y	$T_{1,3}$
I	I	R	R^2	R^3	T_x	$T_{2,4}$	T_y	$T_{1,3}$
R	R	R^2	R^3	I	$T_{2,4}$	T_y	$T_{1,3}$	T_x
R^2	R^2	R^3	I	R	T_y	$T_{1,3}$	T_x	$T_{2,4}$
R^3	R^3	I	R	R^2	$T_{1,3}$	T_x	$T_{2,4}$	T_y
T_x	T_x	$T_{2,4}$	T_y	$T_{1,3}$	I	R^3	R^2	R
$T_{2,4}$	$T_{2,4}$	T_x	$T_{1,3}$	T_y	R	I	R^3	R^2
T_y	T_y	$T_{1,3}$	T_x	$T_{2,4}$	R^2	R	I	R^3
$T_{1,3}$	$T_{1,3}$	T_y	$T_{2,4}$	T_x	R^3	R^2	R	I

On peut remarquer que D_4 est non abélien. De plus si on note $H = \langle R \rangle$ et $K = \langle T_{1,3} \rangle$ alors H est distingué dans D_4, $H \cap K = \{I\}$ et que

$$HK = \{Id, R, R^2, R^3, T_{1,3}, RT_{1,3}, R^2T_{1,3}, R^3T_{1,3}\} = D_4$$

(Ainsi D_4 est produit semi-direct de H et K)

Soit D_n ($n \geq 3$) le **groupe diédral** d'ordre $2n$, engendré par deux éléments a et b tels que a d'ordre n, b d'ordre 2 et $ba = a^{-1}b$. On pose $H = \langle a \rangle$ et $K = \langle b \rangle$. On a

- $H \triangleleft D_n$, puisque $[D_n, H] = 2$ (tout sous-groupe d'indice 2 est distingué),
- $H \cap K = \{e\}$,
- $HK = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ba, \ldots, ba^{n-1}\} = D_n$.

(donc D_n est produit semi-direct de H par K. L'action associée est $\alpha : K \to Aut(H)$, $b \mapsto \alpha_b(a) = bab^{-1} = a$ est l'action triviale).

---

version 1, September 27, 2021

Chapitre 2