Algèbre 2
Session 2 – 19/06/2019
Calculatrices et documents non autorisés. Durée 3h

Exercice 1. (a) Existe-t-il un inverse de $\bar{8}$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

(b) Trouver tous les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

(c) Trouver l'inverse de $\bar{5}$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

(d) Montrer que pour tout $x \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$, $x^9 = x^{-1}$, où x^{-1} est l'inverse de x dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

(e) En déduire les solutions de $x^9 + \bar{5} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Exercice 2 On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{13}] = \{a + b\sqrt{13};\ \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

(b) Pour $x = a + b\sqrt{13} \in \mathbb{Z}[\sqrt{13}]$, on note $\widetilde{x} = a - b\sqrt{13} \in \mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ et $\theta(x) = x\widetilde{x} \in \mathbb{Z}$.

(i) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{13}]$, $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$.

(ii) En déduire que $(\mathbb{Z}[\sqrt{13}])^* = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{13}];\ \ \theta(x) = \pm 1\}$.

(c) Montrer que les éléments 2, $3 + \sqrt{13}$ et $3 - \sqrt{13}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$.

(d) Montrer que 2 et -2 ne sont associés ni à $3 + \sqrt{13}$ ni à $3 - \sqrt{13}$.

(e) En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{A}_n$ le sous-groupe alterné du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

(a) Montrer que $\mathcal{A}_3$ est cyclique.

(b) Soit G un groupe d'ordre $2n$ et H un sous-groupe de G d'ordre n. Montrer que $\forall g \in G$ on a $g^2 \in H$.

(c) En déduire que $\mathcal{A}_4$ (qui est d'ordre 12) n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

(d) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles $\sigma_k = (1, 2, k)$ où $3 \leq k \leq n$.

(e) En déduire que $\mathcal{A}_4$ est bi-cyclique, c-à-d engendré par deux éléments, que l'on déterminera.

Exercice 4 Soit G un groupe fini d'ordre $n > 1$ d'élément neutre e et soit

$$\Lambda = \{t \in \mathbb{N}^* \mid \forall x \in G,\ x^t = e\}.$$

(a) Montrer que Λ n'est pas vide.

On pose $m = \min \Lambda$.

(b) Montrer que pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on a $m < 4$.

(c) Déterminer m pour le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$.

(d) Montrer que si $t \in \Lambda$, alors m divise t et qu'ainsi m divise n.

(e) Montrer que $m = \text{p.p.c.m}(o(x) \mid x \in G)$.

(f) On suppose que G est abélien, que $m = rs$ avec $r > 1$, $s > 1$ et $r \wedge s = 1$. On pose

$$H = \{x \in G \mid x^r = e\} \ \text{ et } \ K = \{x \in G \mid x^s = e\}.$$

(i) Montrer que H et K sont des sous-groupes de G.

(ii) Montrer que $H \cap K = \{e\}$, $HK = G$ et que G est isomorphe à $H \times K$.

(iii) Montrer que $H \neq \{e\}$ et $K \neq \{e\}$.