# Algèbre 2
# Partiel CCI3
14 décembre 2021 – durée 3h

**Exercice 1.** Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre 180.

**Exercice 2.** Soit $\mathbb{Z}_7 := \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'anneau des classes d'équivalences modulo 7 et $(\mathbb{Z}_7)^\times$ l'ensemble de ses éléments inversibles (pour le produit). Soit $\mathbb{U}_6$ le groupe cyclique des racines 6-ièmes de l'unité.

(1) Déterminer tous les générateurs de $\mathbb{U}_6$.

(2) Dire pourquoi $(\mathbb{Z}_7)^\times$ est un groupe cyclique et déterminer son ordre. Donner ses éléments explicitement.

(3) (a) Montrer que $\bar{3}$ est un générateur de $(\mathbb{Z}_7)^\times$.

(b) Déterminer alors les autres générateurs.

(4) Soit $f$ l'application définie, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, par

$$f(\bar{3}^k) = \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{3}}.$$

Montrer que $f$ est bien définie (c-à-d. $\forall k, h \in \mathbb{Z}$, $\bar{3}^k = \bar{3}^h \Rightarrow f(\bar{3}^k) = f(\bar{3}^h)$).

(5) Montrer que $f$ est un morphisme de groupes multiplicatifs de $(\mathbb{Z}_7)^\times$ vers $\mathbb{U}_6$.

(6) Déterminer le noyau de $f$ et déduire que $f$ est injectif.

(7) En déduire que les groupes $(\mathbb{Z}_7)^\times$ et $\mathbb{U}_6$ sont isomorphes.

**Exercice 3.** Soit $G$ un groupe abélien fini, soient $H$ et $K$ deux sous-groupes d'ordres respectifs $r$ et $s$. Soit l'ensemble $HK = \{hk \,:\, h \in H,\ k \in K\}$.

(1) Montrer que $HK$ est un sous-groupe de $G$ ayant au plus $rs$ éléments.

(2) On suppose $r$ et $s$ premiers entre eux. Montrer que $HK$ a exactement $rs$ éléments dans ce cas.

(3) On suppose maintenant que $r$ et $s$ sont deux nombres premiers distincts. Montrer qu'alors $HK$ est un groupe cyclique.

**Exercice 4.** Considérons les deux éléments suivants du groupe symétrique $\mathcal{S}_9$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 7 & 8 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 9 & 5 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Décomposer les permutations $\sigma$ et $\sigma'$ en produit de cycles disjoints.

(2) Justifier pourquoi $\sigma$ et $\sigma'$ sont conjuguées dans $\mathcal{S}_9$, puis exhiber une permutation $\gamma \in \mathcal{S}_9$ telle que $\sigma' = \gamma \circ \sigma \circ \gamma^{-1}$.

t.s.v.p.

(3) Determiner le nombre des permutation $\gamma \in \mathcal{S}_9$ qui conjuguent $\sigma$ et $\sigma'$.
(4) Calculer l'ordre et la signature de $\sigma$.
(5) Calculer $\sigma^{2021}$.

**Exercice 5.** On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + ib\sqrt{5} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ est-il commutatif? unitaire? intègre?

(2) On pose, pour tout $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\theta(z) = z\bar{z} = |z|^2$. On désigne par $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(a) Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])^\times = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \,:\, \theta(z) = 1\}$.
(b) Déterminer alors $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])^\times$.

(3) Montrer que 2, 3, 31, $1 + i\sqrt{5}$ et $1 - i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
(4) Montrer que $1 + i\sqrt{5}$ n'est associé ni à 2, ni à 3 dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
(5) En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas factoriel.