Algèbre 2

Examen du 19 Janvier 2018

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 3h

Question de cours.

Soit A un anneau commutatif unitaire.

(1) Rappeler la définition d'un idéal, d'un idéal maximal et d'un idéal premier de A.

(2) Rappeler la définition d'un élément irréductible de A.

Exercice 1.

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}] = \{z = a + ib\sqrt{p};\quad a, b \in \mathbb{Z}\}$, où $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier et $\langle 1 + i\sqrt{p}\rangle = (1 + i\sqrt{p})\mathbb{Z}[i\sqrt{p}] = \{(1 + i\sqrt{p})z;\quad z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]\}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ engendré par $1 + i\sqrt{p}$.
Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}[i\sqrt{p}] & \to & \mathbb{Z}/(p+1)\mathbb{Z} \\ & a + ib\sqrt{p} & \mapsto & \overline{a + pb} \end{array}$$

(1) Montrer que f est un morphisme d'anneaux surjectif.

(2) Montrer que $p + 1 \in \langle 1 + i\sqrt{p}\rangle$.

(3) En déduire que $\operatorname{Ker} f = \langle 1 + i\sqrt{p}\rangle$.

(4) On suppose que $p = 2$.

(a) L'idéal $\langle 1 + i\sqrt{2}\rangle$ de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est-il maximal?

(b) L'élément $1 + i\sqrt{2}$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?

(5) On suppose que $p \neq 2$.

(a) L'idéal $\langle 1 + i\sqrt{p}\rangle$ de $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ est-il premier?

(b) L'élément $1 + i\sqrt{p}$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$?

Exercice 2.

(1) Soit K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme de degré 2 ou 3. Montrer que P est irréductible dans $K[X]$ si, et seulement si, P n'a pas de racines dans K.
Montrer que cette caractérisation ne s'applique plus pour $d°(P) \geq 4$.

(2) Déterminer la liste des polynômes unitaires irréductibles de degré ≤ 2 dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$.

(3) Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$

$$(i)\ X^2 + X + \bar{1},\quad (ii)\ X^3 + X + \bar{2},\ (iii)\ X^4 + X^3 + X + \bar{1}$$

(4) On considère le polynôme $P(X) = X^5 - X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

(a) On note $\bar{P}$ la réduction de P modulo 3 (image de $P(X)$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$). Montrer que $\bar{P}$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$.

(b) En déduire que $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X])/\langle\bar{P}\rangle$ est un corps.
(c) Le polynôme P est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 3.

(1) Donner la liste de tous les éléments du groupe alterné $\mathcal{A}_4$ en précisant leur ordre.

(2) Soit G un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$. On fait opérer G sur l'ensemble $E = \{1,2,3,4\}$ par l'action induite par l'action naturelle de $\mathcal{S}_4$. Pour $x \in E$ on note O_x l'orbite de x et G_x le stabilisateur de x pour cette action.
Déterminer O_x et G_x pour $x = 1,2,3,4$ dans chacun des cas suivants :
(a) $G = \langle(1\,2\,3)\rangle$;
(b) $G = \langle(1\,2\,3\,4)\rangle$;
(c) $G = \{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$;
(d) $G = \{\mathrm{id}, (1\,2), (1\,2)(3\,4), (3\,4)\}$;
(e) $G = \mathcal{A}_4$.