Algèbre 2

Partiel du 16/11/2017

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h

Exercice 1.
(1) Quelles sont les composantes primaires du groupe $\mathbb{U}_{90}$?
(2) Donner la décomposition cyclique du groupe $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$.

Exercice 2.
Soit G un groupe fini d'ordre 21 agissant sur un ensemble E.
(1) Quels sont les cardinaux possibles des orbites pour cette action?
(2) Pour $i \in \mathbb{N}$ on note n_i le nombre d'orbites à i éléments. Donner une relation entre $\mathrm{card}(E)$ et les n_i.
(3) On suppose que $\mathrm{card}(E) = 11$. Montrer qu'il y a au moins un point fixe pour l'action de G sur E.
(4) On suppose que $\mathrm{card}(E) = 19$ et qu'il n'y a pas de point fixe pour l'action de G sur E. Calculer le nombre d'orbites dans E sous l'action de G.

Exercice 3.
Soit Q_8 le groupe des matrices 2×2 inversibles engendré par $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.
Le groupe Q_8 est appelé *groupe des quaternions*.
(1) Déterminer tous les éléments de Q_8. Quel est alors son ordre? Ce groupe est-il commutatif?
(2) Montrer que Q_8 n'a qu'un élément d'ordre 2.
(3) Déterminer tous les sous-groupes de Q_8.
(4) Montrer que tous les sous-groupes de Q_8 sont distingués.
(5) Montrer que Q_8 ne peut s'obtenir comme produit semi-direct de deux de ses sous-groupes propres.

Exercice 4.
Soit G un groupe fini, $Z(G)$ son centre. On fait agir G sur lui même par conjugaison

$$G \times G \ni (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1} \in G.$$

(1) On suppose que G non commutatif. Soit $x \in G$ tel que $x \notin Z(G)$ et soit $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ le stabilisateur de x. Montrer que $Z(G) \subset G_x \subset G$, où les inclusions sont strictes.
(2) En déduire que si G n'est pas commutatif, $Z(G)$ est un sous-groupe de G dont l'indice est strictement supérieur au plus petit nombre premier divisant $|G|$, l'ordre de G.

(3) Soit p un nombre premier et n un entier. Déduire de la question précédente les valeurs possibles de l'ordre du centre d'un groupe d'ordre p^n? (On rappelle que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à $\{e\}$).
(4) Quel est le centre d'un groupe d'ordre p^2?
(5) Quel est l'ordre du centre d'un groupe non commutatif d'ordre p^3?
(6) Donner un exemple de groupe non commutatif d'ordre p^3.
(7) Montrer que si G est d'ordre p^2, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.