L3 Mathématiques – Site Nancy, S5 – 2021/22

Algèbre 2 – Feuille 6

Généralités sur les anneaux

Exercice 1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \left\{a + b\sqrt{d} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Exercice 2. Déterminer le plus petit sous-anneau unitaire de $\mathbb{C}$ contenant i.

Exercice 3. (a) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}$.

(b) On considère sur l'anneau des entier de Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \left\{a + b\sqrt{i} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

et l'application définie par $\forall z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = z\bar{z}$.

(i) Vérifier que pour tout $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) \in \mathbb{N}$ et $N(zz') = N(z)N(z')$.

(ii) Montrer que $\mathbb{Z}[i]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[i],\ N(z) = 1\}$

(iii) En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

(c) De la même façon déterminer les éléments inversibles de l'anneau

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \left\{a + ib\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

Exercice 4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{d}] = \left\{a + ib\sqrt{d} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un anneau commutatif et intègre.

(b) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est contenu dans tout sous-anneau unitaire de $\mathbb{C}$ qui contient $i\sqrt{d}$.
L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est donc le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ (pour l'inclusion) qui contient $i\sqrt{d}$: c'est le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $i\sqrt{d}$.

(c) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est égal à l'intersection de tous les sous-anneaux unitaires de $\mathbb{C}$ qui contiennent $i\sqrt{d}$.

(d) Déterminer l'ensemble $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]^\times$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$.

Exercice 5. On appelle anneau de Boole un anneau A vérifiant : $\forall x \in A$, $x^2 = x$.

(a) Soit A un anneau de Boole

(i) Montrer que $\forall x \in A$, $x + x = 0_A$

(ii) Montrer que A est commutatif. Dans quel cas A est-il intègre ?

(b) Soit E un ensemble non vide et soit $A = \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Montrer que $(A, \Delta, \cap)$ est un anneau de Bolle, où Δ désigne la différence symétrique des ensembles définie par $X\Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$

Exercice 6. Soient a, b deux éléments d'un anneau A tels que ab soit inversible et b non diviseur de 0_A. Montrer que a et b sont inversibles.

Exercice 7. On note

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{n}{10^k} \mid n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\right\}$$

l'ensemble des nombres décimaux.

(a) Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

(b) Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{D}$ est

$$\mathcal{D}^\times = \{\pm 2^\alpha 5^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$$

(c) Montrer que les idéaux de $\mathbb{D}$ sont principaux.

Exercice 8. Soit

$$A = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}^\star,\ \text{impair}\right\}$$

a) Montrer que A est un sous anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
b) Quels en sont les éléments inversibles ?

Exercice 9. Soit

$$A = \left\{\frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$$

a) Montrer que A est un sous anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
b) Quels en sont les éléments inversibles ?

Exercice 10. Pour $d \in \mathbb{N}$, on note

$$A_d = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid d \text{ divise } (y - x)\right\}$$

a) Montrer que A_d est un sous anneau $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$.
b) Inversement, soit A un sous anneau de $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$.
Montrer que $H = \{x \in \mathbb{Z}/(x,0) \in A\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
c) En déduire qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $H = d\mathbb{Z}$ et $A = A_d$.

Exercice 11. On appelle nilradical d'un anneau commutatif A l'ensemble N formé des éléments nilpotents de A i.e. des $x \in A$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $x^n = 0_A$.
Montrer que N est un idéal de A.

Exercice 12. Soit A un sous-anneau d'un corps K.
On suppose :

$$\forall x \in K \backslash \{0\}, x \in A \text{ ou } x^{-1} \in A$$

et on forme I l'ensemble des éléments de l'anneau A non inversibles.
a) Montrer que I est un idéal de A.
b) Montrer que tout idéal de A autre que A est inclus dans I.

Exercice 13. Montrer que $K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, on note

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \left\{a + b\sqrt{d} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$$

Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{d}], +, \times)$ est un corps.

Exercice 15. Soit A un anneau intègre. On suppose que l'anneau A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux.
Montrer que A est un corps.

Exercice 16. Soit A un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps.
(on pourra introduire l'application $x \mapsto ax$ pour $a \in A, a \neq 0_A$)