UNIVERSITÉ DE LORRAINE L3 Mathématiques – Site Nancy, S5 – 2021/22

Algèbre 2 – Feuille 5

Groupes de permutations

Exercice 1. On considère la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{10}$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 2 & 5 & 10 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
(b) Calculer l'ordre de σ dans $\sigma \in \mathcal{S}_{10}$.
(d) Calculer σ^{4781}.
(d) Calculer la signature de σ.

Exercice 2. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ définie par

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \sigma(k) = n + 1 - k.$$

Décomposer σ en produit de cycles deux à deux disjoints.

Exercice 3. On considère les deux permutations suivantes de $\mathcal{S}_8$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que σ et τ sont conjugués.
(b) Trouver une permutationn s telle que $\tau = \sigma \circ \sigma \circ \sigma^{-1}$; combien y-a-t-il de telles permutations dans $\sigma \in \mathcal{S}_8$.

Exercice 4. Soit p un nombre premier et soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ d'ordre p.
(a) Montrer que les σ-orbites sont de cardinal 1 ou p.
(b) En déduire que si $n < 2p$, alors σ est un cycle.

Exercice 5. Soit $n \geq 3$. Montrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n \backslash \{\mathrm{Id}\}$, il existe une transposition qui ne commute pas à σ.
En déduire que le centre de $\mathcal{S}_n$ est $Z(\mathcal{S}_n) = \{\mathrm{Id}\}$.

Exercice 6. On se proposer de montrer que $\mathcal{S}_3$ est, à isomorphisme près, le seul groupe d'ordre 6 non abélien.
(a) Verifier que $\mathcal{S}_3$ n'est pas abélien.
(b) Montrer que $\mathcal{S}_3 = \{\tau_1^i \sigma_1^j;\ \ i = 0, 1 \text{ et } j = 0, 1, 2\}$, où $\tau_1 = (1, 2)$ et $\sigma_1 = (1, 2, 3)$.
Soit G un groupe non abélien d'ordre 6.
(c) Montrer qu'il existe $a, b \in G$ tels que $G = \{a^i b^j;\ \ i = 0, 1 \text{ et } j = 0, 1, 2\}$.
(d) Montrer que $ba = ab^2$ et $b^2 a = ab$.
(e) En déduire que l'application φ de G dans $\mathcal{S}_3$ définie par

$$\forall (i, j) \in \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\},\ \ \varphi(a^i b^j) = \tau_1^i \sigma_1^j$$

est un isomorphisme.

Exercice 7. Soit $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r)$ un cycle de longueur paire. Montrer que σ^2 n'est pas un cycle.

Exercice 8. Soit $\sigma = (x_1, x_2, \cdots, x_r)$ un r-cycle de longeur $r \geq 2$.
(a) Montrer que, pour $x \in \mathrm{Supp}(\sigma)$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sigma^j(x) = x \iff r \text{ divise } j$$

(b) Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathrm{Supp}(\sigma^m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } r \text{ divise } m \\ \mathrm{Supp}(\sigma) & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Montrer que, pour $x \in \mathrm{Supp}(\sigma)$ et $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathrm{card}(Orb_{\sigma^m}(x)) = \frac{r}{r \wedge m}$$

(d) Montrer que pour $m \in \mathbb{Z}$ non multiple de r, σ^m est un cycle si, et seulement si, m est premier avec r.

Exercice 9. Déterminer l'ordre maximal d'un élément de $\mathcal{S}_5$.

Exercice 10. (a) Soit G un groupe d'ordre $2n$ et H un sous-groupe de G d'ordre n (donc d'indice 2). Montrer que pour tout $g \in G$, $g^2 \in H$.
(b) Montrer que $\mathcal{A}_n$ (qui est d'ordre 12) n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 11. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe caractéristique $\mathcal{S}_n$ (c-à-d. stable par tout automorphisme de $\mathcal{S}_n$).

Exercice 12. Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 4$. Montrer que les produits de deux transpositions disjointes sont conjugués dans $\mathcal{A}(E)$.

Exercice 13. Décomposer en produit de 3-cycle dans $\mathcal{A}_7$ la permutation

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Exercice 14. Le groupe $\mathcal{S}_n$ est-il isomorphe au produit direct $\mathcal{A}_n \times \{-1, 1\}$.

Exercice 15. Soit $n \geq 5$.

(a) Montrer que deux 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$.

(b) Vérifier que ce résultat n'est pas vrai pour $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_3$.

(c) En déduire que le groupe dérivé $D(\mathcal{A}_n)$ de $\mathcal{A}_n$ (c-à-d. le groupe engendré par les commutateurs $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ où $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n$) est $\mathcal{A}_n$.

Exercice 16. Déterminer, pour $n \geq 4$, le centre $Z(\mathcal{A}_n)$ de $\mathcal{A}_n$.

Exercice 17. Soit $n \geq 5$. Montrer que les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_n$ sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$.

Exercice 18. On se propose de montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_5$ est simple (c-à-d. n'a pas de sous-groupes distingués autres que lui même et $\{\mathrm{Id}\}$).

(a) Donner une description de $\mathcal{A}_5$ en classant ses éléments en fonction de leur ordre.

(b) Montrer que $\mathcal{A}_5$ est un groupe simple.