UNIVERSITÉ DE LORRAINE L3 Mathématiques – Site Nancy, S5 – 2021/22

Algèbre 2 – Feuille 4

Décomposition des groupes abéliens finis

Exercice 1. *Pour les groupes suivants, déterminer la décomposition primaire, calculer le type, puis la décomposition cyclique.*

(a) $G = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/90\mathbb{Z})$.
(b) $G = (\mathbb{Z}/84\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/90\mathbb{Z})$.
(c) $G = (\mathbb{Z}/40\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})$.

Exercice 2. *Donner la décomposition primaire du groupe abélien* $\mathbb{Z}/851\mathbb{Z}$. *En déduire la structure du groupe* $Aut(\mathbb{Z}/851\mathbb{Z})$.

Exercice 3. *Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre :*

(a) *600.*
(b) *720.*
(c) *3240.*

Exercice 4. *Parmi les groupes suivants, tous abéliens d'ordre 180, déterminer lesquels sont isomorphes entre eux :*

(1) $\mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$
(2) $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$
(3) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/90\mathbb{Z})$
(4) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$
(5) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/45\mathbb{Z})$
(6) $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
(7) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
(8) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$
(9) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
(10) $(\mathbb{Z}/181\mathbb{Z})^\times$
(11) $(\mathbb{Z}/19\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$
(12) $(\mathbb{Z}/209\mathbb{Z})^\times$

Exercice 5. *Montrer que dans tout groupe abélien d'ordre 40, il y a au moins un élément d'ordre 10.*
Existe-t-il un groupe abélien d'ordre 40 dans lequel l'ordre de tout élément divise 10 ?

Exercice 6. (a) *Soient* $k \geq 2$ *et* $n \geq 2$ *des entiers. Posons* $d = pgcd(k, n)$ *et* $m = ppcm(k, n)$.
Montrer que $G = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ *et c'est, à isomorphisme près, la seule expression de* G *sous la forme* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ *avec* p *divisant* q *(décomposition cyclique, avec* (p, q) *l'invariant de* G*).*

(b) *Application :* $G = (\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/45\mathbb{Z})$.