Algèbre 2 – Feuille 2

Actions de groupes

Exercice 1. *Soit le sous-groupe de* $GL(2,\mathbb{R})$

$$G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})\}$$

Montrer que de G *agit naturellement sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$\forall g \in G, \forall X \in \mathbb{R}^2, \quad (g,X) \mapsto g\cdot X = gX$$

Déterminer les orbites de cette action.

Exercice 2. *Soit* G *un sous-groupe de* $GL(2,\mathbb{R})$. *On fait agir* G *sur le plan affine euclidien en choisissant un point* O *de cet espace et en identifiant* $\mathbb{R}^2$ *et les vecteurs d'origine* O. *Décrire l'orbite d'un point* A *quand* G *est le sous-groupe engendré par*

(a) une symétrie par rapport à une droite D *passant par* O *;*

(b) une rotation d'angle $\pi/2$ *de centre* O.

Exercice 3. *Soit* G *un sous-groupe du groupe symétrique* $\mathcal{S}_4$ *opérant sur* $\{1,2,3,4\}$ *par l'action naturelle de* $\mathcal{S}_4$. *Pour* $i \in \{1,2,3,4\}$, *on note* O_i *l'orbite de* i *et* G_i *le stabilisateur de* i. *Décrire* O_i *et* G_i *lorsque :*

(a) G *est engendré par le 3-cycle* $(1\,2\,3)$ *;*

(b) G *est engendré par le 4-cycle* $(1\,2\,3\,4)$ *;*

(c) G *est engendré par les double transpositions* $(x\,y)(z\,t)$ *disjointes,* $x, y, z, , t \in \{1,2,3,4\}$ *;*

(d) G *est le sous-groupe des permutations paires de* $\mathcal{S}_4$.

Exercice 4. *On considère l'action de* $\mathcal{S}_3$ *sur* $X = \mathcal{S}_3$ *par conjugaison. Pour chaque point* $x \in X$, *décrire l'orbite et le stabilisateur.*

Exercice 5. *Soit* $n \geq 1$. *On considère l'action du groupe orthogonal* $O_n(\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *donnée par*

$$\forall (A,x) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n, \;\; A\cdot x = A(x)$$

Montrer que les orbites sont les sphères de centre $0_{\mathbb{R}^n}$.

Exercice 6. *Soient* n, m *deux entiers naturels non nuls. On fait agir le groupe* $G = GL(n,\mathbb{R}) \times GL(m,\mathbb{R})$ *sur l'ensemble des matrices rectangulaires* $E = \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *par*

$$\forall (P,Q) \in G, \forall A \in E, \; (P,Q)\cdot A = PAQ^{-1}$$

Montrer que les orbites de cette action sont les ensembles

$$\mathcal{O}_r = \{A \in E, \; rg(A) = r\}$$

où r *est un entier compris entre* 0 *et* $min(n,m)$.

Exercice 7. *(a) Déterminer les orbites de l'action naturelle de* $GL(n,\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que le groupe $GL(n,\mathbb{R})$ *opère transitivement sur* $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

(c) Déterminer le stabilisateur de $(1,0,\ldots,0)$.

(d) En déduire qu'il existe une bijection naturelle de $GL(n,\mathbb{R})/GL(n-1,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ *sur l'ensemble* $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Exercice 8. *(a) Montrer que le groupe* $SL(2,\mathbb{R})$ *opère transitivement sur le demi-plan* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, \; \mathrm{Im}(z) > 0\}$ *via*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

(b) Déterminer le stabilisateur de i.

(c) En déduire qu'il existe une bijection entre $SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$ *et* $\mathbb{T}$

Exercice 9. *On note* $SO_2(\mathbb{R})$ *(resp.* $SO_3(\mathbb{R})$*) le groupe de rotations (isométries directes) de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^2$ *(resp.* $\mathbb{R}^3$*).*

(a) Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ *agit transitivement sur le cercle unité de* $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ *agit transitivement sur la sphère unité de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. *Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension ≥ 2 et $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité de E. On désigne par $O(E)$ le groupe orthogonal de E (groupe des isométries de E) et par $SO(E)$ (ou $O^+(E)$) le sous-groupe de $O(E)$ formé des automorphismes orthogonaux positifs (rotations vectorielles).*

(1) Montrer que l'application $(u, x) \in SO(E) \times S \mapsto u \cdot x = u(x)$ définit une action transitive de $SO(E)$ sur S. En déduire que pour tout $x \in S$, $SO(E)/SO(E)_x$ est en bijection avec S.

(2) On suppose que $\dim E = 2$.

(a) Montrer que pour tout $x \in S$, $SO(E)_x = \{Id\}$, en déduire que $SO(E)$ est en bijection avec S.

(b) Montrer que tout sous-groupe fini d'ordre n de $SO(E)$ est cyclique, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(3) On suppose que $\dim E = 3$.

(a) Montrer que toute rotation $u \neq Id$ de $SO(E)$ a exactement deux points fixes x et $-x$ dans S. Ces points sont appelés les pôles de u.

(b) Soit G un sous-groupe fini d'ordre n de $SO(E)$ et notons P l'ensemble des pôles des éléments de $G \setminus \{Id\}$.

Montrer que $(u, x) \in G \times P \mapsto u \cdot x = u(x)$ définit une action de G sur P et que le nombre d'orbites pour cette action est $r = 2$ ou $r = 3$.

(c) Montrer que si $r = 2$ alors le groupe G est cyclique d'ordre n, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(d) [Facultatif] Montrer que si $r = 3$ alors le groupe G est isomorphe soit à groupes $\mathcal{D}_n$ (groupe diédral), soit à $\mathcal{A}_4$, soit à $\mathcal{S}_4$, soit à $\mathcal{A}_5$.

Exercice 11. *Soit G un groupe d'ordre 35 opérant sur un ensemble E de cardinal 19. On suppose que G ne fixe aucun élément de E. Combien y a-t-il d'orbites pour cette action ?*

Exercice 12. *Soit G un groupe d'ordre 143 opérant sur un ensemble E qui contient 108 éléments. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$.*

Exercice 13. *On se propose de déterminer les groupes finis qui ont exactement trois classes de conjugaison. Soit G un groupe fini, d'ordre n, et supposons que G a exactement trois classes de conjugaison.*

(a) En considérant l'opération de G sur lui même par conjugaisons. Montrer qu'on a

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \tag{1}$$

avec des entires $a \geq b > 0$ tels que $a|n$ et $b|n$.

(b) Déterminer toutes les solutions de l'équation (1) en entiers $n \geq a \geq b > 0$ tels que $a|n$ et $b|n$.

(c) Donner la lise complète des groupes finis, à isomorphisme près, qui ont exactement trois classes de conjugaison.

Exercice 14. *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.*

(a) Montrer qu'en posant $g \cdot (aH) = (ga)H$, où $a, g \in G$, on définit une action de G sur l'ensemble G/H des classes à gauche modulo H.

(b) Montrer que cette action est transitive et déterminer le stabilisateur de aH.

(c) On suppose que G est fini. Calculer le cardinal d'une orbite et retrouver le théorème de Lagrange.

Exercice 15. *Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G.*

(a) Montrer que les parties HgK, où $g \in G$, constituent une partition de G.

(b) Soit $g \in G$. Montrer que $N_g = \{(h, k) \in H \times K \mid hg = gk\}$ est un sous-groupe de $H \times K$.

(c) On suppose que G est fini et que $HK = G$. Montrer que $|N_g|$ ne dépend que du $|H|$ et $|K|$ et non de $g \in G$.
Calculer sa valeur pour $g = e$ et en déduire que $|G| \times |H \cap K| = |H| \times |K|$.
Donner une autre démonstration de cette égalité lorsque $H \lhd G$.

Exercice 16. *Soit G un groupe d'ordre $2p$, avec $p > 2$ premier.*

(a) Montrer que G admet deux sous-groupes H et K d'ordre p et 2 respectivement.

(b) Montrer que $G = HK$, $H \lhd G$ et $H \cap K = \{e\}$.

(c) Montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_{2p}.