Algèbre 2 – Feuille 2

Actions de groupes

Exercice 1. *Soit le sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$*

$$G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})\}$$

Montrer que de G agit naturellement sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall g \in G, \forall X \in \mathbb{R}^2, \quad (g, X) \mapsto g \cdot X = gX$$

Déterminer les orbites de cette action.

Corrigé l'exercice 1. *En posant $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, l'application en question est donnée par*

$$g \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au \\ bv \end{pmatrix}$$

Il s'agit bien d'une action de groupe car

- $\forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $I_2 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
- $\forall g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in G$ *et* $\forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} g_1 \cdot \left(g_2 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) &= g_1 \cdot \begin{pmatrix} a_2 u \\ b_2 v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 u \\ b_1 b_2 v \end{pmatrix} \\ &= (g_1 g_2) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il est claire que

- *l'orbite de* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est*

$$\mathcal{O}_1 := G \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

- *l'orbite de* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est*

$$\mathcal{O}_2 := G \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}^*\right\}$$

Celle-ci coincide avec l'orbite de tout vecteur de $\{0\} \times \mathbb{R}^*$

- *l'orbite de* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est*

$$\mathcal{O}_3 := G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}^*\right\}$$

Celle-ci coincide avec l'orbite de tout vecteur de $\mathbb{R}^* \times \{0\}$

- *l'orbite de* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est*

$$\mathcal{O}_4 := G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{R}^*\right\}$$

Celle-ci coincide avec l'orbite de tout vecteur de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

Comme les ensembles $\mathcal{O}_i$ sont disjoints et que $\cup \mathcal{O}_i = \mathbb{R}^2$, on déduit que $\mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_4$ sont les orbites de l'action de G sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. *Soit G un sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$. On fait agir G sur le plan affine euclidien en choisissant un point O de cet espace et en identifiant $\mathbb{R}^2$ et les vecteurs d'origine O. Décrire l'orbite d'un point A quand G est le sous-groupe engendré par*

(a) une symétrie par rapport à une droite D passant par O ;

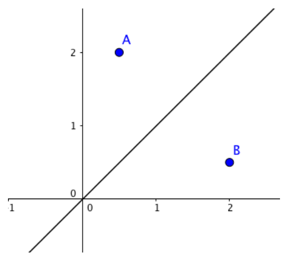
(b) une rotation d'angle $\pi/2$ de centre O.

Corrigé l'exercice 2. *Le groupe G agit sur le plan affine $\mathcal{P} \simeq \mathbb{R}^2$.*

(a) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite D passant par O et

$$H = \langle s \rangle = \{Id, s\}$$

car $s^2 = s \circ s = Id$ ($s(A) = B$ et $s(B) = A$ pour tout point A).



L'orbite d'un point $A \in \mathcal{P}$ est donc

$$H \cdot A = \begin{cases} \{A, s(A)\} & si A \neq O \\ \{O\} & si A = O \end{cases}$$

(b) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. La matrice de r dans la base canonique (orthonormée) est

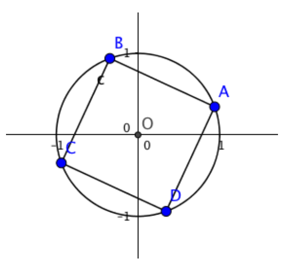
$$R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est d'ordre 4, donc r est d'ordre 4 et

$$H = \langle r \rangle = \{Id, r, r^2, r^3\}$$

et l'orbite d'un point A est

$$H \cdot A = \{A, r(A) = B, r^2(A) = C, r^3(A) = D\}$$



Exercice 3. *Soit G un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$ opérant sur $\{1,2,3,4\}$ par l'action naturelle de $\mathcal{S}_4$. Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, on note O_i l'orbite de i et G_i le stabilisateur de i. Décrire O_i et G_i lorsque :*

(a) G est engendré par le 3-cycle $(1\,2\,3)$;

(b) G est engendré par le 4-cycle $(1\,2\,3\,4)$;

(c) G est engendré par les double transpositions $(x\,y)(z\,t)$ disjointes, $x, y, z, , t \in \{1,2,3,4\}$;

(d) G est le sous-groupe des permutations paires de $\mathcal{S}_4$.

Corrigé l'exercice 3. *(a) Soit $G = \langle \sigma = (1,2,3) \rangle = \{Id, \sigma, \sigma^2\} = \{Id, (1,2,3), (1,3,2)\}$. On a*

$\sigma(1) = 2, \sigma^2(1) = 3, \sigma^3(1) = 1$, donc $O_1 = G \cdot 1 = \{1,2,3\}$;

$\sigma(2) = 3, \sigma^2(2) = 1, \sigma^3(2) = 2$, donc $O_2 = G \cdot 2 = \{1,2,3\}$;

$\sigma(3) = 1, \sigma^2(3) = 2, \sigma^3(3) = 3$, donc $O_3 = G \cdot 3 = \{1,2,3\}$;

$\sigma(4) = 4$, donc $O_4 = G \cdot 4 = \{4\}$.

Pour $k = 1,2,3$, on a $\operatorname{card}(O_k) = 3$. Comme $|G|/|G_k| = \operatorname{card}(O_k)$ et que $|G| = 3$, on trouve $|G_k| = 1$ par conséquent $G_k = \{Id\}$.

Pour $k = 4$, on a $|G|/|G_4| = \operatorname{card}(O_4)=1$, donc $|G_4| = |G|$ et $G_4 = G$.

On fait de même pour les questions (b)-(d), en voici un résumé :

(b) Par symétrie (ce sera la même chose dans les exemples suivants), il suffit de considérer $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{O}_1$, Par le même raisonnement que ci-dessus, on a $\mathcal{S}_1 = \{Id\}$ et $\mathcal{O}_1 = \{1,2,3,4\}$,

(c) On vérifie facilement que le produit de deux "double transposition" est ou bien l'identité ou bien une double transposition. Une double transposition ne fixe aucun élément de $\{1,2,3,4\}$ et on peut trouver une double transposition qui envoie 1 sur n'importe quel élément de $\{2,3,4\}$, En résume, on a $\mathcal{O}_1 = \{1,2,3,4\}$ et $\mathcal{S}_1 = \{Id\}$,

(d) . Les éléments de $\mathcal{A}_4$ sont l'identité, les double transpositions et les 3 -cycles. D'après la question précédente, on peut déjà affirmer que $\mathcal{O}_1 = \{1,2,3,4\}$ puisque l'orbite de 1 par $\mathcal{A}_4$ contient au moins l'orbite de 1 par les double transpositions, Cherchons maintenant le stabilisateur de 1 , Une double transposition ne peut pas être dans le stabilisateur de 1 , D'après la question (a), les 3 -cycles qui stabilisent 1 sont ceux qui n'ont pas 1 dans leur support. On a donc $\mathcal{S}_1 = \{Id, (2,3,4), (2,4,3)\}$.

Exercice 4. *On considère l'action de $\mathcal{S}_3$ sur $X = \mathcal{S}_3$ par conjugaison. Pour chaque point $x \in X$, décrire l'orbite et le stabilisateur.*

Corrigé l'exercice 4.

Exercice 5. *Soit $n \geq 1$. On considère l'action du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par*

$$\forall (A, x) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n, \quad A \cdot x = A(x)$$

Montrer que les orbites sont les sphères de centre $0_{\mathbb{R}^n}$.

Corrigé l'exercice 5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot 0_{\mathbb{R}^n} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, qu'on peut considérer comme la phère de centre $0_{\mathbb{R}^n}$ et de rayon 0.

Supposons $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et montrons que

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot x = S(0_{\mathbb{R}^n}, \|x\|) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = \|x\|\}.$$

Pour tout $y \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot x$, il existe $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $y = A(x)$ et $\|y\| = \|A(x)\| = \|x\|$, donc $y \in S(0, \|x\|)$. Réciproquement, si $y \in S(0, \|x\|)$ avec $x \neq 0$, on a $y \neq 0$ et on peut construire deux bases orthonormées $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ avec $e_1 = \frac{1}{\|x\|} x$ et $e'_1 = \frac{1}{\|y\|} y$. La matrice de passage A de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est alors orthogonale et $y = \|y\| e'_1 = \|x\| A(e_1) = A(\|x\| e_1) = A(x)$, donc $y \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot x$.

Exercice 6. *Soient n, m deux entiers naturels non nuls. On fait agir le groupe $G = GL(n, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R})$ sur l'ensemble des matrices rectangulaires $E = \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ par*

$$\forall (P, Q) \in G, \forall A \in E, \ (P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$$

Montrer que les orbites de cette action sont les ensembles

$$\mathcal{O}_r = \{A \in E, \ rg(A) = r\}$$

où r est un entier compris entre 0 et $\min(n, m)$.

Corrigé l'exercice 6. On notre $A \simeq B \iff \exists P, Q$ tels que $B = PAQ^{-1}$ et on dira que A et B sont conjuguées.

Montrons d'abord que

$A \simeq B \iff A$ et B ont le même rang $\iff \mathrm{Orb(A)} = \mathrm{Orb(A)}$.

Supposons $A \simeq B$, alors A et B représentant la même application linéaire u, elles ont le même rang $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(u)$ (le rang d'une matrice est invariant par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible.)

Inversement, supposons $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = r$. Pour montrer que $A \simeq B$, il suffit (par transitivité de la relation $\simeq$) de montrer qu'elles sont toutes deux équivalentes à une même matrice, en l'occurence à la matrice J_r définie par : $\mathrm{J}_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où I_r désigne la matrice identité de taille r

Montrer que J_r code les application linéaires u_A, u_B canoniquement associées à A, B c'est-à-dire qu'il existe des bases $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}$ de $\mathbb{K}^n$ dans lesquelles :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1}(u_A) = \mathrm{J}_r = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2}(u_B) \ (\nabla)$$

Traitons le cas de u_A. Par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u_A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = m - r$ et il existe une base $(e_i)_{r+1 \leq i \leq m}$ de $\mathrm{Ker}(u_A)$, de cardinal $m - r$, puis par le théorème de la base incomplète, une famille libre $(e_1, \ldots, e_r)$ telle que :

$$\mathbf{e_1} = (e_i)_{1 \leq i \leq m} \text{ soit une base de } \mathbb{K}^m.$$

On a ainsi construit une base $\mathbf{e_1}$ de $\mathbb{K}^m$ adaptée au noyau de u_A. Il reste désormais à construire une base $\mathbf{f}_1$ de $\mathbb{K}^n$ telle que la matrice de u_A dans les bases $(\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1)$ soit de la forme requise (∇). On définit alors naturellement une famille libre de $\mathbb{K}^n$ de cardinal r par : $f_i = u_A(e_i)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, image de la famille libre $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ par l'injection $u_{A_{|\,\mathrm{vect}_{(e_1,\ldots,e_r)}}}$.

En effet, $u_{A_{1\,\mathrm{vect}_{(e_1,\ldots,e_r)}}}$ est injective par construction même puisque :

$$\mathrm{Ker}\left(u_{A_{|\mathrm{vect}(e_1,\ldots,e_r)}}\right) = \mathrm{Ker}(u_A) \cap \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_r) = \{0\}$$

Ainsi, toujours d'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille libre $(f_{r+1}, \ldots, f_n)$ telle que $f = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit une base *de* $\mathbb{K}^n$*, pour laquelle on a Mat* $_{e_1,f_1}(u_A) = \mathrm{J}_r \implies A \simeq \mathrm{J}_r$*. On a de même que* $B \simeq \mathrm{J}_r$ *et donc* $A \simeq B$*. Enfin, on en conclut alors directement d'après ce qui précède que* $\mathrm{Orb}(A) = \mathrm{Orb}(B) \iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$*.*

$G \circlearrowright \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *permet de partionner* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *en les orbites disjointes sous cette action. Par la caractérisation des orbites par le rang, on a*

$$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) = \bigcup_{0 \le r \le \min(n,m)} O_r$$

où O_r *désigne l'orbite des matrices de rang* r *dont un représentant particulier est la matrice* J_r*.*

Exercice 7. *(a) Déterminer les orbites de l'action naturelle de* $GL(n,\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{R}^n$*.*

(b) Montrer que le groupe $GL(n,\mathbb{R})$ *opère transitivement sur* $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$*.*

(c) Déterminer le stabilisateur de $(1,0,\dots,0)$*.*

(d) En déduire qu'il existe une bijection naturelle de $GL(n,\mathbb{R})/GL(n-1,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ *sur l'ensemble* $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$*.*

Corrigé l'exercice 7. solution solution solution

Exercice 8. *(a) Montrer que le groupe* $SL(2,\mathbb{R})$ *opère transitivement sur le demi-plan* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ *via*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

(b) Déterminer le stabilisateur de i*.*

(c) En déduire qu'il existe une bijection entre $SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$ *et* $\mathbb{T}$

Corrigé l'exercice 8. (a) Il faut d'abord montrer que (1) est bien définie, c-à-d. $cz + d \neq 0$ *et* $\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0$*.*

-si $cz + d = 0$ *et* $z = \alpha i + \beta$ *(avec* $\alpha > 0$*) alors* $\begin{cases} c\alpha = 0 \\ c\beta + b = 0 \end{cases}$.

Comme $\alpha \neq 0$*, alors nécessairement* $c = 0$ *et* $d = 0$*, mais ceci est en contradiction avec* $\det(g) = 1$*. Par conséquent* $cz + d \neq 0$*.*

- on a

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{ac|z|^2 + bd + adz + bc\bar{a}}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

Or $ad - bc = 1$*, donc* $ad = 1 + bc$ *d'où*

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{ac|z|^2 + bd + bc(z+\bar{z}) + z}{|cz+d|^2}$$

IL s'ensuit alors que

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0.$$

Soient $z \in \mathbb{T}$ *et* $g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ *deux éléments de* G*.*

- On a $I_2 \cdot z = \frac{1 \times z + 0}{0 \times z + 1} = z$*.*

- On effectue le calcul,

$$\begin{aligned} g_1 \cdot (g_2 \cdot z &= \frac{a_1(g_2 \cdot z) + b_1}{c_1(g_2 \cdot z) + d_1} \\ &= \frac{a_1\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right) + b_1}{c_1\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right) + d_1} \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)} \\ &= (g_1g_2) \cdot z \end{aligned}$$

En conclusion (1) définie bien une action de $G = SL(2,\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{T}$*.*

- Montrons maintenant que cette actions est transitive. Pour cela, il suffit de montrer que $\forall z \in \mathbb{T}, \exists g \in G$ *tel que* $g \cdot i = z$*.*

Soit $z = ai + b \in \mathbb{T}$*, et donc* $a > 0$*. les deux matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

sont bien dans G (car de déterminant 1) et donc leur produit, noté g est encore dans G.

On a

$$\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}\sqrt{a} & 0\\ 0 & 1/\sqrt{a}\end{pmatrix}\cdot i\right] \quad = \quad \begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot(ai) = ai + b = z$$

On en déduit que l'action est bien transitive et par conséquent, cette action n'a qu'une seule orbite, à savoir $\mathbb{T}$.

(b) Soit $g = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL(2,R)$, on a

$$\begin{aligned} g \in SL(2,R)_i &\iff g\cdot i = i\\ &\iff ai+b = i(ci+d)\\ &\iff a = d \ \text{ et } \ b = -c\\ &\iff g = \begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Mais $\det(g) = 1$, donc $a^2+b^2 = 1$, ce qui entraîne l'existence d'un réel θ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. Par conséquent

$$SL(2,R)_i = \left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\ \theta\in\mathbb{R}\right\} = SO(2,\mathbb{R})$$

le groupe des rotations.

(c) Il y a une seule orbite, à savoir $\mathbb{T}$, donc $\mathbb{T} = SL(2,\mathbb{R})\cdot i$ est en bijection avec $SL(2,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{R})_i = SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$.

Exercice 9. *On note $SO_2(\mathbb{R})$ (resp. $SO_3(\mathbb{R})$) le groupe de rotations (isométries directes) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$).*

(a) Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé l'exercice 9. *(a) Soient A, B deux points du cercle unité. Il suffit de considérer la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.*

(b) Soient maintenant A, B deux points de la sphère unité. Soit P un plan contenant O, A et B et D la droite perpendiculaire à P passant par $\boldsymbol{O}$. On considère alors la rotation d'axe D qui transforme A et B (d'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$).

Exercice 10. *Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension ≥ 2 et $S = \{x\in E \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité de E. On désigne par $O(E)$ le groupe orthogonal de E (groupe des isométries de E) et par $SO(E)$ (ou $O^+(E)$) le sous-groupe de $O(E)$ formé des automorphismes orthogonaux positifs (rotations vectorielles).*

(1) Montrer que l'application $(u,x)\in SO(E)\times S\mapsto u\cdot x = u(x)$ définit une action transitive de $SO(E)$ sur S. En déduire que pour tout $x\in S$, $SO(E)/SO(E)_x$ est en bijection avec S.

(2) On suppose que $\dim E = 2$.

(a) Montrer que pour tout $x\in S$, $SO(E)_x = \{Id\}$, en déduire que $SO(E)$ est en bijection avec S.

(b) Montrer que tout sous-groupe fini d'ordre n de $SO(E)$ est cyclique, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(3) On suppose que $\dim E = 3$.

(a) Montrer que toute rotation $u\neq Id$ de $SO(E)$ a exactement deux points fixes x et $-x$ dans S. Ces points sont appelés les pôles de u.

(b) Soit G un sous-groupe fini d'ordre n de $SO(E)$ et notons P l'ensemble des pôles des éléments de $G\setminus\{Id\}$.

Montrer que $(u,x)\in G\times P\mapsto u\cdot x = u(x)$ définit une action de G sur P et que le nombre d'orbites pour cette action est $r = 2$ ou $r = 3$.

(c) Montrer que si $r = 2$ alors le groupe G est cyclique d'ordre n, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(d) [Facultatif] Montrer que si $r = 3$ alors le groupe G est isomorphe soit à groupes $\mathcal{D}_n$ (groupe diédral), soit à $\mathcal{A}_4$, soit à $\mathcal{S}_4$, soit à $\mathcal{A}_5$.

Corrigé l'exercice 10. *(1) Comme $u\in\mathcal{O}^+(E)$ conserve la norme, on a $u(x)\in S$ pour tout $x\in S$ et il est clair qu'on a une action.*

Dire que cette action est transitive revient à dire que pour tous x, y dans S, il existe une rotation $u\in\mathcal{O}^+(E)$ telle que $y = u(x)$.

Si $x = \pm y, u = \pm Id$ convient, sinon on désigne par H le plan vectoriel engendré par $\{x, y\}$. Comme (x,y) est lié, on a $|\langle x\mid y\rangle| <$

$\|x\|\|y\|=1$ *et il existe un unique réel* $\theta \in]-\pi,\pi[$ *tel que* $\cos(\theta)=\langle x \mid y\rangle$. *Une base orthonormée de* H *est donnée par le procédé de Gram-Schmidt :*

$$e_1=x, e_2=\frac{\pm 1}{\|y-\langle x \mid y\rangle x\|}(y-\langle x \mid y\rangle x)=\frac{1}{\sin(\theta)}(y-\cos(\theta)x)$$

et on complète cette base en une base orthonormée $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *de* E. *La rotation* v *du plan* H *ayant pour matrice :*

$$R=\left(\begin{array}{cc}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{array}\right)$$

dans la base (e_1,e_2) *est telle que* $v(x)=v(e_1)=\cos(\theta)e_1+\sin(\theta)e_2=y$ *et la rotation* $u\in\mathcal{O}^+(E)$ *définie par* $u(e_k)=v(e_k)$ *pour* $k=1,2$ *et* $u(e_k)=e_k$ *pour* $k=3,\cdots,n$ *convient.*

De ce qui précède, on déduit aussi que l'application $(u,x)\in\mathcal{O}(E)\times S\mapsto u\cdot x=u(x)$ *définit une action transitive de* $\mathcal{O}(E)$ *sur* S.

Comme l'action de $\mathcal{O}^+(E)$ *sur* S *est transitive,* S *est l'unique orbite et pour tout* $x\in S$, *l'ensemble quotient* $\mathcal{O}^+(E)/(\mathcal{O}^+(E))_x$ *est en bijection avec* S.

(2) (a) Le vecteur nul est l'unique point fixe d'une rotation $u\neq Id$ *d'un plan euclidien* E *(ce qui se vérifie facilement en utilisant la représentation matricielle d'une rotation du plan dans une base orthonormée).*

(b) $\mathcal{O}^+(E)$ *est en bijection avec* S *lui même en bijection avec le groupe* Γ *des nombres complexes de module égal à 1 (une base orthonormée* (e_1,e_2) *de* E *étant choisie tout élément de* S *s'écrit* $x=x_1e_1+x_2e_2$ *avec* $x_1^2+x_2^2=1$ *et l'application* $x\mapsto x_1+ix_2$ *est bijection de* S *sur* Γ *) et on connaît les sous-groupes finis de* Γ *(exercice 2.3).*

(3) (a) Résulte du fait que, pour $\dim(E)=3$, *l'ensemble des points fixes de* $u\in\mathcal{O}^+(E)\backslash\{Id\}$ *est une droite* $D=\mathbb{R}x$ *avec* $x\in S$ *(voir la lecon sur les isométries d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3 au chapitre 17) et* $D\cap S=\{-x,x\}$.

(b) Pour $(u,x)\in G\times P$, *il existe une rotation* $v\in G\backslash\{Id\}$ *telle que* $\{-x,x\}$ *soit l'ensemble des points fixes de* v *dans* S *et on a :*

$$\left(u\circ v\circ u^{-1}\right)(u(x))=u(v(x))=u(x)$$

c'est-à-dire que $u(x)$ *est un pôle de* $u\circ v\circ u^{-1}\in G\backslash\{Id\}$ $\left(u\circ v\circ u^{-1}=Id\right.$ *si, et seulement si,* $\left.v=Id\right)$, *donc* $u(x)\in P$ *et* G *agit sur* P *En notant, pour tout* $u\in G$ *:*

$$\mathrm{Fix}(u)=\{x\in P\mid u(x)=x\}$$

le théorème de Burnside nous dit que le nombre d'orbites pour cette action de G *sur* P *est :*

$$r=\frac{1}{\mathrm{card}(G)}\sum_{u\in G}\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(u))=\frac{1}{n}(\mathrm{card}(P)+2(n-1))$$

(pour $u=Id, \mathrm{Fix}(u)=P$ *et pour* $u\neq Id$, *Fix* (u) *a exactement deux éléments). Tenant compte du fait que* $2\leq$ *card* $(P)\leq 2(n-1)$, *on a :*

$$2\leq r\leq 4\left(1-\frac{1}{n}\right)<4$$

donc $r=2$ *ou* $r=3$

Exercice 11. *Soit* G *un groupe d'ordre 35 opérant sur un ensemble* E *de cardinal 19. On suppose que* G *ne fixe aucun élément de* E. *Combien y a-t-il d'orbites pour cette action ?*

Corrigé l'exercice 11. *Soit* $\mathcal{O}$ *une orbite de cette action. Alors* $\mathbf{card}(\mathcal{O})$ *divise 35 et par conséquent* $\mathbf{card}(\mathcal{O})\in\{1,5,7,35\}$. *Comme* G *ne fixe aucun point* $\mathbf{card}(\mathcal{O})\neq 1$ *et comme* $\mathbf{O}\subset E$, $\mathbf{card}(\mathcal{O})\neq 35$. *Les seuls valeurs possibles sont donc 5 et 7.*

Soient n *le nombre d'orbites à 5 éléments et* m *le nombre d'orbites à 7 éléments. D'après l'équation des classes on a*

$$19=5n+7m \tag{2}$$

Modulo 5 l'équation () devient $2\equiv 2m$ $[5]$ *ou encore* $m\equiv 2$ $[5]$ *ce qui donne* $m=2$. *Modulo 7 l'équation () devient* $5\equiv 5n$ $[7]$ *ou encore* $n\equiv 1$ $[7]$ *ce qui donne* $n=7$. *On a donc bien* $19=5+7+7$.

En conclusion, il y a 2 orbites à 7 éléments et 1 orbite à 5 éléments.

Exercice 12. *Soit* G *un groupe d'ordre 143 opérant sur un ensemble* E *qui contient 108 éléments. Montrer qu'il existe* $x\in E$ *tel que* $g\cdot x=x$ *pour tout* $g\in G$.

Corrigé l'exercice 12. *Supposons que G ne fixe aucun point, c-à-d, il n'y a pas d'orbite réduite à un point. Soit $\mathcal{O}$ une orbite de cette action. Donc* $\mathbf{card}(\mathcal{O}) \in \{11, 13\}$ *(voir exercice précédent).*

Soient n le nombre d'orbites à 11 éléments et m le nombre d'orbites à 13 éléments. D'après l'équation des classes on a

$$108 = 11n + 13m \tag{3}$$

Modulo 11 cette équation devient $2m \equiv -2$ $[11]$ ou encore $m \equiv -1 \equiv 10$ $[11]$. On peut donc écrire $m = 10 + 11k$ avec $k \geq 0$ (car $m \geq 0$. Ceci est impossible car en remplacant dans l'équation des classes on a

$$108 = 11n + 13 \times (10 + 11k) > 108$$

ce qui est absurde.

Par conséquent G fixe au moins un point.

Exercice 13. *On se propose de déterminer les groupes finis qui ont exactement trois classes de conjugaison. Soit G un groupe fini, d'ordre n, et supposons que G a exactement trois classes de conjugaison.*

(a) En considérant l'opération de G sur lui même par conjugaisons. Montrer qu'on a

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \tag{4}$$

avec des entires $a \geq b > 0$ tels que $a|n$ et $b|n$.

(b) Déterminer toutes les solutions de l'équation (1) en entiers $n \geq a \geq b > 0$ tels que $a|n$ et $b|n$.

(c) Donner la lise complète des groupes finis, à isomorphisme près, qui ont exactement trois classes de conjugaison.

Corrigé l'exercice 13. *(a) G agit sur lui même par conjugaison : $G \times G \ni (g, h) \mapsto g \cdot h = ghg^{-1}$. Tiut d'abord l'orbite de e est réduite à $\{e\}$. Comme par hypothèse il y a trois orbites : $\mathcal{O}_1 = \{e\}$, $\mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_3$, la somme des cardinaux de ces orbites est égal à l'ensemble sur lequel on agit, à savoir $n = |G|$,*

$$n = 1 + \mathbf{card}(\mathcal{O}_2) + \mathbf{card}(\mathcal{O}_3)$$

Or $\mathbf{card}(\mathcal{O}_2)$ et $\mathbf{card}(\mathcal{O}_2)$ divisent n, donc il exite $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = a\mathbf{card}(\mathcal{O}_2)$ et $n = b\mathbf{card}(\mathcal{O}_3)$. Comme les deux orbites $\mathbf{card}(\mathcal{O}_2)$ et $\mathbf{card}(\mathcal{O}_3)$ jouent le même rôle, on peut supposer que $a \geq b$. Par conséquent

$$n = 1 + \frac{n}{a} + \frac{n}{b},$$

ou encore

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \tag{5}$$

(b) soit (n, a, b) une solution de (5) avec $n \geq a \geq b > 0$. Donc $1 = 1 + \frac{n}{a} + \frac{n}{b} \leq 3 \times \frac{1}{b}$ ce qui donne $b \leq 3$. Mais l'equation (5) impose $b \neq 1$ par conséquent $b = 2$ ou $b = 3$.

- *si $b = 2$, en remplaçant dans (5) on a $\frac{1}{2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} \leq 2 \times \frac{1}{a}$. Donc $a \leq 4$. Cette dernière équation impose $a \neq 2$. D'où $a = 3$ ou $a = 4$.*
  - *si $a = 3$, alors $n = 6$, d'ou la solution $(6, 3, 2)$.*
  - *si $a = 4$, alors $n = 4$, d'ou la solution $(4, 4, 2)$.*

  si $b = 3$, , en remplaçant dans (5) on a $\frac{2}{3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} \leq 2 \times \frac{1}{a}$, d'où $a \leq 3$. La valeur $a = 2$ est impossible, donc $a = 3$ et par suite $n = 3$, d'où la solution $(3, 3, 3)$.

(c) Si G est un groupe fini d'ordre n ayant 3 classes de conjugaisons, alors d'après (a) et (b), $n \in \{3, 4, 6\}$.

- *si $n = 3$, alors puisque 3 est premier, G est cyclique et $G \simeq \mathbb{Z}_3$.*
- *si $n = 4 = 2^2$, alors G est abélien (ordre le carré d'un nombre premier) et il admet 4 classes de conjugaisons, ce qui est absurde.*
- *si $n = 6$, alors les trois classes de conjugaisons ont respectivement 1, 3 et 2 éléments. Ceci montre que G n'est pas abélien et donc $G \simeq \mathcal{S}_3$.*

En conclusion, à isomorphisme près, $\mathbb{Z}_3$ et $\mathcal{S}_3$ sont les seuls groupes finis ayant trois classes de conjugaisons.

Exercice 14. *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.*

(a) Montrer qu'en posant $g \cdot (aH) = (ga)H$, où $a, g \in G$, on définit une action de G sur l'ensemble G/H des classes à gauche modulo H.

(b) Montrer que cette action est transitive et déterminer le stabilisateur de aH.

(c) On suppose que G est fini. Calculer le cardinal d'une orbite et retrouver le théorème de Lagrange.

Corrigé l'exercice 14. *(a) Posons $X = G/H$. Soient $g \in G, x \in X$ et $a, a' \in G$ deux représentants de la classe à gauche x. On a $aH = a'H = x$ ou encore $a^{-1}a' \in H$. Or, $(ga)^{-1}ga' = a^{-1}g^{-1}ga' = a^{-1}a' \in H$ donc $gaH = ga'H$. Si on remplace a par un autre représentant a' de la classe $x = aH$, alors $ga'H = gaH$. La formule a bien un sens et définit une application de $G \times X$ dans X. C'est une action de G sur X :*

$$\begin{aligned} &\forall x = aH \in X \quad e \cdot x = eaH = aH = x \\ &\forall x = aH \in X \quad \forall g \in G \quad \forall g' \in G \\ &\qquad g \cdot (g' \cdot x) \quad = g \cdot (g'aH) = g\,(g'a)\,H = (gg')\,aH = gg' \cdot x \end{aligned}$$

(b) Quels que soient $x = aH \in X, y = bH \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$ (prendre $g = ba^{-1}$). Il existe donc une seule orbite, égale à X. Le stabilisateur de $x = aH$ est aHa^{-1} car :

$$g \in G_x \Leftrightarrow gaH = aH \Leftrightarrow a^{-1}gaH = H \Leftrightarrow a^{-1}ga \in H \Leftrightarrow g \in aHa^{-1}$$

(c) Puisqu'on a $G_x = aHa^{-1} = \mathrm{Ad}_a(H) \simeq H$, on retrouve le th. de Lagrange :

$$[G : H] = \mathrm{card}(G/H) = \mathrm{card}(\mathrm{orb}(x)) = \frac{[G:1]}{[G_x:1]} = \frac{[G:1]}{[H:1]}$$

Exercice 15. *Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G.*

(a) Montrer que les parties HgK, où $g \in G$, constituent une partition de G.

(b) Soit $g \in G$. Montrer que $N_g = \{(h,k) \in H \times K \mid hg = gk\}$ est un sous-groupe de $H \times K$.

(c) On suppose que G est fini et que $HK = G$. Montrer que $|N_g|$ ne dépend que du $|H|$ et $|K|$ et non de $g \in G$.
Calculer sa valeur pour $g = e$ et en déduire que $|G| \times |H \cap K| = |H| \times |K|$.
Donner une autre démonstration de cette égalité lorsque $H \lhd G$.

Corrigé l'exercice 15. *(a) Le groupe H agit sur G par les translations à gauche $l_k = g \mapsto \mathrm{hg}$ et K agit sur G par les translations à droite $r_k = g \mapsto gk^{-1}$. On a $l_h \circ r_k = r_k \circ l_h$ pour tout $h \in H$ et tout $k \in K$ donc $\varphi : (h,k) \mapsto l_h \circ r_k$ est un homomorphisme de groupes de $H \times K$ dans le groupe $\mathcal{S}(G)$ des bijections de G sur G. Pour cette action, l'orbite de $g \in G$ est $\{\mathrm{hgk}^{-1}; h \in H, k \in K\} = HgK$. Ces parties constituent donc une partition de G.*

(b) Le stabilisateur de $g \in G$ est le sous-groupe N_g de $H \times K$, ensemble des $(h,k) \in H \times K$ tels que $hgk^{-1} = g$ c'est-à-dire tels que $\mathrm{hg} = gk$.

(c) $HK = HeK$ est l'orbite de e. Donc $HK = G$ si et seulement si l'action est transitive. Dans ce cas, les stabilisateurs N_g des éléments $g \in G$ sont conjugués dans $H \times K$ et ont donc le même cardinal. Calculons-le. On a :

$$[G:1] = \mathrm{card}(\mathrm{orb}(g)) = \frac{[H \times K : 1]}{[N_g:1]} \qquad d'où \qquad [N_g:1] = \frac{[H:1][K:1]}{[G:1]}$$

Si $g = e$, on a $N_e \simeq H \cap K$ car

$$\begin{aligned} N_e &= \{(h,k) \in H \times K \mid hek^{-1} = e\} \\ &= \{(h,k) \in H \times K \mid h = k\} \\ &= \{(h,h); h \in H \cap K\} \end{aligned}$$

La relation précédente donne $[G:1][H \cap K:1] = [H:1][K:1]$.

Si $H \lhd G$ ou plus généralement si K est contenu dans le normalisateur de H, le th. de Noether montre que $G/H \simeq K/(K \cap H)$ et on retrouve que $\frac{[G:1]}{[H:1]} = \frac{[K:1]}{[H \cap K:1]}$.

Exercice 16. *Soit G un groupe d'ordre $2p$, avec $p > 2$ premier.*

(a) Montrer que G admet deux sous-groupes H et K d'ordre p et 2 respectivement.

(b) Montrer que $G = HK$, $H \lhd G$ et $H \cap K = \{e\}$.

(c) Montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_{2p}.

Corrigé l'exercice 16. *Voir feuille 3*