Algèbre linéaire L2
Partiel du 08/11/2019, 14h
Rédigé par PE Chaput
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 (Exercice de cours) *Soit* $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la forme bilinéaire alternée définie par la formule* $\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$ *et soit* $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définies par* $f_1(x, y) = (2y, 3x)$, $f_2(x, y) = (x + 2y, y)$ *et* $f_3(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$. *Calculer* $f_1^\star\omega, f_2^\star\omega$ *et* $f_3^\star\omega$. *En déduire la valeur de* $\det(f_1), \det(f_2), \det(f_3)$.

Exercice 2 *Soit* A *une matrice de taille* $n \times n$ *à coefficients réels et soit* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Donner la valeur de* $\det({}^tA)$ *en fonction de* $\det(A)$.
2. *Donner la valeur de* $\det(\lambda A)$.
3. *On suppose que* n *est impair et que* A *est antisymétrique, c'est-à-dire telle que* ${}^tA = -A$. *Montrer que* $\det(A) = 0$.

Exercice 3 *Soit* A *une matrice de taille* $n \times n$ *à coefficients réels.*

1. *Rappeler la définition de la comatrice* $\widetilde{A}$.
2. *Rappeler la relation entre* $\widetilde{A}$ *et* A.
3. *Montrer que* A *est inversible si et seulement si* $\widetilde{A}$ *est inversible.*
4. *Montrer que si* A *est inversible alors* $\det(\widetilde{A}) = \det(A)^{n-1}$.
5. *Montrer que si* A *n'est pas inversible, alors* $\det(\widetilde{A}) = \det(A)^{n-1}$.

On a donc $\det(\widetilde{A}) = \det(A)^{n-1}$ *dans tous les cas.*

Exercice 4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *On va calculer* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par deux méthodes différentes.*

1. *Calculer* A^2, A^3, A^4.

Première méthode.

2. *Soit* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer par récurrence* J^n *pour tout* n.
3. *Soit* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Etablir une relation entre* A, I *et* J.
4. *Calculer* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Au cours du calcul, on pourra utiliser la formule du binôme*

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} b^{n-k}$$

avec $a = 6$ *et* $b = 1$. *On aura soin de vérifier que la formule obtenue est compatible avec les résultats de la première question.*

Deuxième méthode.

5. *Trouver une matrice* P *inversible et une matrice* D *diagonale telles que* $A = PDP^{-1}$. *Calculer* P^{-1}.
6. *Calculer* $(PDP^{-1})^2$ *puis* $(PDP^{-1})^n$ *en fonction de* P *et* D.

7. *Retrouver la valeur de* A^n.

Exercice 5 *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $f, g : E \to E$ *des applications linéaires. On suppose que* $f \circ g = g \circ f$ *et que* f *et* g *sont diagonalisables. Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on note* $E_\lambda(f) := \ker(f - \lambda Id_E)$ *le sous-espace propre de* f *associé à la valeur propre* λ.

1. *Soient* $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ *les valeurs propres de* f *et* $\mu_1, \cdots, \mu_s$ *celles de* g. *Montrer qu'on a*
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f) \text{ et } E = \bigoplus_{j=1}^{s} E_{\mu_j}(g).$$
2. *Soit* $x \in E$ *et* $i \in \{1, \cdots, r\}$. *Montrer que si* $f(x) = \lambda_i x$ *alors* $f(g(x)) = \lambda_i g(x)$.
3. *Montrer que les sous-espaces propres de* f *sont stables par* g : *pour* $i \in \{1, \cdots, r\}$, *on a l'inclusion* $g(E_{\lambda_i}(f)) \subset E_{\lambda_i}(f)$.
4. *Soit, pour* $1 \leq i \leq r$, *un vecteur* x_i *de* $E_{\lambda_i}(f)$. *Soit* $x = \sum_i x_i$ *et soit* $j \in \{1, \cdots, s\}$. *Montrer qu'on a* $g(x) = \mu_j x$ *si et seulement si pour tout* $i \in \{1, \cdots, r\}$, $g(x_i) = \mu_j x_i$.
5. *En déduire que*
$$E_{\mu_j}(g) = \bigoplus_{i} E_{\mu_j}(g) \cap E_{\lambda_i}(f).$$
6. *Montrer qu'il existe une base* $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ *de* E *constituée de vecteurs propres de* f *et de* g *(c'est-à-dire que pour tout* k *il existe* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *tels que* $f(e_k) = \lambda e_k$ *et* $g(e_k) = \mu e_k$*).*

Le résultat montré dans la sixième question s'énonce en disant que f *et* g *sont simultanément diagonalisables.*