Algèbre linéaire L2
Partiel du 08/11/2019, 14h
Rédigé par PE Chaput
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 (Exercice de cours) 3 *points* *Soit $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire alternée définie par la formule $\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$ et soit $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par $f_1(x, y) = (2y, 3x)$, $f_2(x, y) = (x + 2y, y)$ et $f_3(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$. Calculer $f_1^\star\omega, f_2^\star\omega$ et $f_3^\star\omega$. En déduire la valeur de $\det(f_1), \det(f_2), \det(f_3)$.*

Solution : Par définition, on a

$$\begin{array}{rclcl} f_1^*\omega((x_1,y_1),(x_2,y_2)) & = & \omega(f_1(x_1,y_1),f_1(x_2,y_2)) & = & \omega((2y_1,3x_1),(2y_2,3x_2)) \\ & = & (2y_1)(3x_2)-(3x_1)(2y_2) & = & -6(x_1y_2-x_2y_1) \\ & = & -6\omega((x_1,y_1),(x_2,y_2))\,. & & \end{array}$$

On en déduit, par définition de det, que $\det(f_1) = -6$. De manière similaire,

$$\begin{array}{rclcl} f_2^*\omega((x_1,y_1),(x_2,y_2)) & = & \omega(f_2(x_1,y_1),f_2(x_2,y_2)) & = & \omega((x_1+2y_1,y_1),(x_2+2y_2,y_2)) \\ & = & (x_1+2y_1)(y_2)-(y_1)(x_2+2y_2) & = & x_1y_2-x_2y_1 \\ & = & \omega((x_1,y_1),(x_2,y_2))\,. & & \end{array}$$

On en déduit que $\det(f_2) = 1$. Le calcul pour f_3 est similaire ; on trouve $\det(f_3) = 0$.

Exercice 2 4 *points* *Soit A une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Donner la valeur de $\det({}^tA)$ en fonction de $\det(A)$.* **1** *point*
2. *Donner la valeur de $\det(\lambda A)$.* **1** *point*
3. *On suppose que n est impair et que A est antisymétrique, c'est-à-dire telle que ${}^tA = -A$. Montrer que $\det(A) = 0$.* **2** *points*

Solution :

1. $\det({}^tA) = \det(A)$.
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
3. Si ${}^tA = -A$, alors $\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. Si de plus n est impair, alors $(-1)^n = -1$, donc $\det(A) = -\det(A)$, donc $\det(A) = 0$.

Exercice 3 6 *points* *Soit A une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels.*

1. *Rappeler la définition de la comatrice $\widetilde{A}$.* **1** *point*
2. *Rappeler la relation entre $\widetilde{A}$ et A.* **1** *point*
3. *Montrer que A est inversible si et seulement si $\widetilde{A}$ est inversible.* **1,5** *points*
4. *Montrer que si A est inversible alors $\det(\widetilde{A}) = \det(A)^{n-1}$.* **1,5** *points*
5. *Montrer que si A n'est pas inversible, alors $\det(\widetilde{A}) = \det(A)^{n-1}$.* **1** *point*

On a donc $\det(\widetilde{A}) = \det(A)^{n-1}$ dans tous les cas.

Solution :

1. Soit $A(i,j)$ la matrice extraite de A obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne. La comatrice est la matrice dont le coefficient (i,j) est $(-1)^{i+j}\det(A(i,j))$.
2. On a vu dans le cours que $A\,{}^t\widetilde{A} = \det(A) I_n$.

3. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si $\det(A) = 0$, l'égalité précédente donne $A\,{}^t\widetilde{A} = 0$, donc ${}^t\widetilde{A}$ ne peut pas être inversible. Si $\det(A) \neq 0$, alors $(\frac{1}{\det(A)}A)\,{}^t\widetilde{A} = I_n$, ce qui montre que ${}^t\widetilde{A}$ est inversible d'inverse $\frac{1}{\det(A)}A$. On conclut en utilisant le fait que $\widetilde{A}$ est inversible si et seulement si ${}^t\widetilde{A}$ est inversible.
4. Si A est inversible, alors la relation de la question 2 donne $\det(A^t\widetilde{A}) = \det(\det(A)I_n) = \det(A)^n$. Comme $\det(A^t\widetilde{A}) = \det(A)\det({}^t\widetilde{A}) = \det(A)\det(\widetilde{A})$, on en déduit que $\det(A)^n = \det(A)\det(\widetilde{A})$, ce qui donne, puisque $\det(A) \neq 0$, $\det(\widetilde{A}) = \det(A)^{n-1}$.
5. Si A n'est pas inversible, on a vu que $\widetilde{A}$ n'est pas inversible, et donc $\det(A) = \det(\widetilde{A}) = 0$. La relation $\det(\widetilde{A}) = \det(A)^{n-1}$ est donc vérifiée dans ce cas aussi.

Exercice 4 **14** *points* *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *On va calculer* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par deux méthodes différentes.*

1. *Calculer* A^2, A^3, A^4. **2** *points*

Première méthode.

2. *Soit* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer par récurrence* J^n *pour tout* n. **2** *points*
3. *Soit* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Etablir une relation entre* A, I *et* J. **1** *point*
4. *Calculer* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. **3** *points* *Au cours du calcul, on pourra utiliser la formule du binôme*
$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} b^{n-k}$$
avec $a = 6$ *et* $b = 1$. *On aura soin de vérifier que la formule obtenue est compatible avec les résultats de la première question.*

Deuxième méthode.

5. *Trouver une matrice* P *inversible et une matrice* D *diagonale telles que* $A = PDP^{-1}$. *Calculer* P^{-1}. **3** *points*
6. *Calculer* $(PDP^{-1})^2$ *puis* $(PDP^{-1})^n$ *en fonction de* P *et* D. **1** *point*
7. *Retrouver la valeur de* A^n. **2** *points*

Solution :
1ère méthode.

$$A^n = (2J - I)^n = (-I)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2J)^k (-I)^{n-k} = (-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) J$$
$$= (-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} \right) J = (-1)^n I + \frac{1}{3}((6-1)^n - (-1)^n) J$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix},$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

2ème méthode. Puisque $\mathrm{rg}(A+I) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}(A+I)) = 2$ et -1 est valeur propre de A d'ordre au moins 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace : $\lambda - 1 - 1 = 3$ et donc $\lambda = 5$. Par suite, $\chi_A = -(X+1)^2(X-5)$.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x+y+z = 0$ et donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De même, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x = y = z$ et $E_5 = \mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(-1, -1, 5)$ et on a $A = PDP^{-1}$.

Calcul de P^{-1}. Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = i - j \\ e_2 = i - k \\ e_3 = i + j + k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j = i - e_1 \\ k = i - e_2 \\ e_3 = i + i - e_1 + i - e_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ j = \frac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) \\ k = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{array}\right.$$

et donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit alors $n \in \mathbb{Z}$.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 5^n \\ -(-1)^n & 0 & 5^n \\ 0 & -(-1)^n & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix},$$

et on retrouve le résultat obtenu plus haut.

Exercice 5 **7** *points* *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g : E \to E$ des applications linéaires. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f et g sont diagonalisables. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(f) := \ker(f - \lambda Id_E)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.*

1. *Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres de f et $\mu_1, \cdots, \mu_s$ celles de g. Montrer qu'on a*
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f) \ \text{ et } \ E = \bigoplus_{j=1}^{s} E_{\mu_j}(g).$$
1 *point*
2. *Soit $x \in E$ et $i \in \{1, \cdots, r\}$. Montrer que si $f(x) = \lambda_i x$ alors $f(g(x)) = \lambda_i g(x)$.* **1** *point*
3. *Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g : pour $i \in \{1, \cdots, r\}$, on a l'inclusion $g(E_{\lambda_i}(f)) \subset E_{\lambda_i}(f)$.* **1** *point*

4. *Soit, pour $1 \leq i \leq r$, un vecteur x_i de $E_{\lambda_i}(f)$. Soit $x = \sum_i x_i$ et soit $j \in \{1, \cdots, s\}$. Montrer qu'on a $g(x) = \mu_j x$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $g(x_i) = \mu_j x_i$.* **1** *point*

5. *En déduire que*
$$E_{\mu_j}(g) = \bigoplus_i E_{\mu_j}(g) \cap E_{\lambda_i}(f).$$
1 *point*

6. *Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E constituée de vecteurs propres de f et de g (c'est-à-dire que pour tout k il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f(e_k) = \lambda e_k$ et $g(e_k) = \mu e_k$).* **2** *points*

Le résultat montré dans la sixième question s'énonce en disant que f et g sont simultanément diagonalisables.

Solution :

1. Comme f est diagonalisable, E est la somme directe des sous-espaces propres de f. On a donc
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f) \ ,$$
et similairement pour g.

2. Supposons que $f(x) = \lambda_i x$. Alors $f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)$.

3. On a montré à la question précédente que si $x \in E_{\lambda_i}(f)$, alors $g(x) \in E_{\lambda_i}(f)$ puisque $f(g(x)) = \lambda_i g(x)$. Ceci montre que $g(E_{\lambda_i}(f)) \subset E_{\lambda_i}(f)$.

4. L'équation $g(x) = \mu_j x$ est équivalente à $\sum_i g(x_i) = \sum_i \mu_j x_i$. Posons $y_i = g(x_i)$. Par la question précédente, $y_i \in E_{\lambda_i}(f)$. On a alors $\sum_i y_i = \sum_i (\mu_j x_i)$ avec $y_i, \mu_j x_i \in E_{\lambda_i}(f)$, et les $E_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe. Cette équation est donc équivalente à ce que pour tout i, on ait $y_i = \mu_j x_i$, soit $g(x_i) = \mu_j x_i$, soit $x_i \in E_{\mu_j}(g)$.

5. Soit $x = \sum_i x_i$. On a montré à la question précédente que x est dans $E_{\mu_j}(g)$ si et seulement si chaque x_i est dans $E_{\mu_j}(g)$ (et donc dans $E_{\mu_j}(g) \cap E_{\lambda_i}(f)$, car $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$). Ceci revient à dire que $x = \sum_i x_i \in \bigoplus_i E_{\mu_j}(g) \cap E_{\lambda_i}(f)$. D'où l'égalité des sous-espaces vectoriels.

6. On a vu que
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\mu_j}(g) \text{ et } E_{\mu_j}(g) = \bigoplus_i E_{\mu_j}(g) \cap E_{\lambda_i}(f)$$
(questions 1 et 5). On a donc
$$E = \bigoplus_{i,j} E_{\lambda_i}(f) \cap E_{\mu_j}(g) \,. \tag{1}$$
Soit, pour chaque couple (i, j), une base $\mathcal{B}_{i,j}$ de $E_{\lambda_i}(f) \cap E_{\mu_j}(g)$. Par (1), on obtient une base de E en prenant la réunion des bases de $E_{\lambda_i}(f) \cap E_{\mu_j}(g)$. Soit donc $\mathcal{B} = \cup_{i,j} \mathcal{B}_{i,j}$. Nous venons de voir qu'elle est une base de E. De plus, si $x \in \mathcal{B}$, il existe par définition un couple (i, j) tel que $x \in E_{\lambda_i}(f) \cap E_{\mu_j}(g)$. En posant $\lambda = \lambda_i$ et $\mu = \mu_j$, on a comme souhaité les relations $f(x) = \lambda x$ et $g(x) = \mu x$.