Examen d'Algèbre linéaire 2

10 Janvier 2023 – durée 2h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. (1) Rappeler la définition du polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Montrer que le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ divise son polynôme caractéristique.

(3) Déterminer le polynôme caractéristique de de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1+a & 1 \\ -a & -a & -1 \\ a & a-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(4) En déduire le polynôme minimal de A. (Une discussion sur le paramètre a est nécessaire).

(5) Donner une condition nécéssaire et suffisante sur le paramètre a pour que A soit diagonalisable.

Exercice 2. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer le polynôme caractéristique de A. En déduire les valeurs propres de A.

Soit l'equation

$$M^2 + M = A \qquad (*)$$

et soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette equation.

(2) Déduire de (1) un polynôme annulateur de M.

(3) En déduire que M est diagonalisable.

(4) Soient λ et μ les deux valeurs propres de M. Montrer que $\lambda^2+\lambda$ et $\mu^2+\mu$ sont valeurs propres de A. En déduire que, quite à échanger λ et μ, on a $\lambda \in \{0, -1\}$ et $\mu \in \{1, -2\}$.

(5) Déduire de ce qui précède que :

(a) si $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ alors $M = \frac{1}{2}A$;

(b) si $\lambda = 0$ et $\mu = -2$ alors $M = -A$;

(c) si $\lambda = -1$ et $\mu = 1$ alors $M = A - I_2$;

(d) si $\lambda = -1$ et $\mu = -2$ alors $M = -I_2 - \frac{1}{2}A$.

On pourrait trouver dans chacun des cas un polynôme annulateur de M et utiliser la relation $(*)$.

Exercice 3. On considère la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer sans calculs que $\det(A_a) = 0$. En déduire une valeur propre de A_a.

(2) Calculer le rang de A_a en discutant suivant les valeurs du paramètre a. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(A_a)$.

(3) Calculer le polynôme caractéristique de A_a, en fonction de a.

(4) Discuter suivant les valeurs de a les valeurs propres de A_a, en précisant à chaque fois le spectre de A_a.

(5) Déduire des questions précédentes que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice A_a est diagonalisable.

(6) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, diagonaliser A_a : trouver une matrice P inversible et une matrice D_a diagonale telles que $A_a = PD_aP^{-1}$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^3 - 5A^2 + 6A = 0. \qquad (**)$$

(1) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer ses valeurs propres éventuelles.

(2) En déduire toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de trace égale à 7 et vérifiant $(**)$.