Examen d'Algèbre linéaire 2

10 Janvier 2023 – durée 2h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. (1) Rappeler la définition du polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Montrer que le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ divise son polynôme caractéristique.

(3) Déterminer le polynôme caractéristique de de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1+a & 1 \\ -a & -a & -1 \\ a & a-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(4) En déduire le polynôme minimal de A. (Une discussion sur le paramètre a est nécessaire).

(5) Donner une condition nécéssaire et suffisante sur le paramètre a pour que A soit diagonalisable.

Corrigé l'exercice 1. (1) cf. cours

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique χ_A est un polynôme annulateur de A. Par définition, le polynôme minimal μ_A divise tout polynôme annulateur de A. Il résulte que μ_A divise χ_A.

(3) On a

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1+a-\lambda & 1+a & 1 \\ -a & -a-\lambda & -1 \\ a & a-1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+a-\lambda & 1+a & 1 \\ -a & -a-\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+a-\lambda & a & 1 \\ -a & 1-a-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

on développe ensuite par rapport à la troisième ligne,

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (-\lambda-1) \begin{vmatrix} 1+a-\lambda & a \\ -a & 1-a-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)\left((1-\lambda)^2 - a^2 + a^2\right) \\ &= -(1+\lambda)(1-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de la matrice A sont -1, valeur propre simple, et 1 , valeur propre double.

(4) On a $A+I \neq 0$, $A-I \neq 0$ et $(A-I)^2 \neq 0$ (faire le calcul). Les candidats pour le polynôme minimal sont $(X+1)(X-1)$ et $(X+1)(X-1)^2$. Or

$$(A-I)(A+I) = \begin{pmatrix} 2a & 2a & 0 \\ -2a & -2a & 0 \\ 2a & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

Donc si $a = 0$, alors $\pi_A(X) = (X+1)(X-1)$ et si $a \neq 0$, alors $\pi_A(X) = \chi_A(X) = (X+1)(X-1)^2$.

(5) Si $a = 0$ alors le polynôme minimal $\pi_A(X) = (X+1)(X-1)$ de A est scindé simple, donc A est diagonalisable.

Si $a \neq 0$, alors le polynôme minimal $\pi_A(X) = (X+1)(X-1)^2$ de A n'est scindé simple, donc A n'est pas diagonalisable.

Ainsi A est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Exercice 2. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer le polynôme caractéristique de A. En déduire les valeurs propres de A.

Soit l'equation

$$M^2 + M = A \qquad (*)$$

et soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de cette equation.

(2) Déduire de (1) un polynôme annulateur de M.

(3) En déduire que M est diagonalisable.

(4) Soient λ et μ les deux valeurs propres de M. Montrer que $\lambda^2 + \lambda$ et $\mu^2 + \mu$ sont valeurs propres de A. En déduire que, quite à échanger λ et μ, on a $\lambda \in \{0, -1\}$ et $\mu \in \{1, -2\}$.

(5) Déduire de ce qui précède que :

(a) si $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ alors $M = \frac{1}{2}A$;

(b) si $\lambda = 0$ et $\mu = -2$ alors $M = -A$;

(c) si $\lambda = -1$ et $\mu = 1$ alors $M = A - I_2$;
(d) si $\lambda = -1$ et $\mu = -2$ alors $M = -I_2 - \frac{1}{2}A$.
On pourrait trouver dans chacun des cas un polynôme annulateur de M et utiliser la relation $(*)$.

Corrigé l'exercice 2. (1) On obtient aisément $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$ et $\mathrm{Sp}\, A = \{0, 2\}$

(2) Soit M une matrice solution de l'équation $M^2 + M = A$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, donc $A(A-2I_2) = 0$ et par suite $(M^2+M)(M^2+M-2I_2) = 0$. On en déduit que le polynôme $P(X) = (X^2+X)(X^2+X-2)$ est un polynôme annulateur de M.

(3) Comme

$$P(X) = \left(X^2 + X\right)\left(X^2 + X - 2\right) = X(X+1)(X-1)(X+2)$$

est scindé à racines (réelles) simples, la matrice M est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

(4) Notons λ et μ les deux valeurs propres de M. Soit $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ un vecteur propre de M associé à λ. On a

$$\begin{aligned} Av = (M^2 + M)v = M^2v + Mv = M(Mv) + Mv = M(\lambda v) + \lambda v \\ = \lambda^2 v + \lambda v = (\lambda^2 + \lambda)v \end{aligned}$$

Donc $\lambda^2 + \lambda$ est valeur propre de A. On montre de même que $\mu^2 + \mu$ est valeur propre de A. Ainsi $\lambda^2 + \lambda$ et $\mu^2 + \mu$ correspondent aux deux valeurs propres de A. Quitte à échanger λ et μ on peut supposer $\lambda^2 + \lambda = 0$ et $\mu^2 + \mu = 2$, c-à-d.,

$$\lambda \in \{0, -1\} \text{ et } \mu \in \{1, -2\}.$$

(5) Il y a alors quatre situations possibles :

(a) Cas $\lambda = 0$ et $\mu = 1$.

On a alors $\chi_M(M) = M(M - I_2) = O_2$ donc $M^2 - M = O_2$. Combinée à la relation $M^2 + M = A$, on obtient

$$M = \frac{1}{2}A.$$

(b) Cas $\lambda = 0$ et $\mu = -2$.

On a de même $\chi_M(M) = M(M + 2I_2) = O_2$, donc $M^2 + 2M = O_2$. Combinée à la relation $M^2 + M = A$, on obtient

$$M = -A.$$

(c) Cas $\lambda = -1$ et $\mu = 1$.

Alors $\chi_M(M) = M^2 - I_2 = O_2$. Combinée à la relation $M^2 + M = A$, on obtient

$$M = A - I_2$$

(d) Cas $\lambda = -1$ et $\mu = -2$.

Alors $\chi_M(M) = M^2+3M+2I_2 = O_2$. Combinée à la relation $M^2+M = A$, on obtient

$$M = -I_2 - \frac{1}{2}A.$$

Exercice 3. On considère la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer sans calculs que $\det(A_a) = 0$. En déduire une valeur propre de A_a.

(2) Calculer le rang de A_a en discutant suivant les valeurs du paramètre a. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(A_a)$.

(3) Calculer le polynôme caractéristique de A_a, en fonction de a.

(4) Discuter suivant les valeurs de a les valeurs propres de A_a, en précisant à chaque fois le spectre de A_a.

(5) Déduire des questions précédentes que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice A_a est diagonalisable.

(6) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, diagonaliser A_a : trouver une matrice P inversible et une matrice D_a diagonale telles que $A_a = PD_aP^{-1}$.

Corrigé l'exercice 3. (1) La matrice A_a admet au moins deux colonnes (lignes) identiques, donc $\det(A_a) = 0$. On en déduit que 0 est une valeur propre de A_a.

(2) On utilise l'algorithme de Gauss :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

– si $a \neq \pm 1$, alors $\operatorname{rang}(A_a) = 2$, et $\dim \operatorname{Ker}(A_a) = 2$.
– si $a = 1$, alors $\operatorname{rang}(A_a) = 1$, et $\dim \operatorname{Ker}(A_a) = 3$.
– si $a = -1$, alors $\operatorname{rang}(A_a) = 1$, et $\dim \operatorname{Ker}(A_a) = 3$.

(3) On a

$$\begin{aligned}
\chi_{A_a}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 & a \\ a & 1-\lambda & a & 1 \\ 1 & a & 1-\lambda & a \\ a & 1 & a & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2+2a-\lambda & a & 1 & a \\ 2+2a-\lambda & 1-\lambda & a & 1 \\ 2+2a-\lambda & a & 1-\lambda & a \\ 2+2a-\lambda & 1 & a & 1-\lambda \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

où on a fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Donc

$$\begin{aligned}
\chi_{A_a}(\lambda) &= (2(1+a)-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1-\lambda & a & 1 \\ 1 & a & 1-\lambda & a \\ 1 & 1 & a & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2(1+a)-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a-\lambda & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-a-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2(1+a)-\lambda)(-\lambda) \begin{vmatrix} 1-a-\lambda & 1-a \\ 1-a & 1-a-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2((2(1+a)-\lambda))(2(1-a)-\lambda))
\end{aligned}$$

(4) On fait une discussion suivant les valeurs de a :
– Si $a = 1$, alors $\chi_{A_a}(\lambda) = -\lambda^3(4-\lambda)$ et $\operatorname{Sp}(A_a) = \{0, 4\}$.
– Si $a = -1$, alors $\chi_{A_a}(\lambda) = -\lambda^3(4-\lambda)$ et $\operatorname{Sp}(A_a) = \{0, 4\}$.
– Si $a \neq \pm 1$, alors $\chi_{A_a}(\lambda) = \lambda^2((2(1+a)-\lambda))(2(1-a)-\lambda))$, d'où
 * si $2(1+a) \neq 2(1-a)$, c-à-d. $a \neq 0$, alors $\operatorname{Sp}(A_a) = \{0, 2(1-a), 2(1+a)\}$;
 * si $2(1+a) = 2(1-a)$, c-à-d. $a = 0$, alors $\chi_A(\lambda) = \lambda^2(2-\lambda)^2$ et $\operatorname{Sp}(A_a) = \{0, 2\}$.

(5) Si $a = 1$, alors 4 est valeur propre simple et 0 est valeur propre triple. Or d'après la question (5) dans ce cas $\dim \operatorname{Ker}(A_1) = 3$. On en déduit que A_1 est diagonalisable.

Si $a = -1$, on montre avec les même arguments que A_{-1} est diagonalisable.

Si $a = 0$ alors 2 est valeur propre double et dans ce cas on vérifie facilement que $\dim \operatorname{Ker}(A_0 - 2I_4) = 2$. Or 0 est valeurs propre double et d'après la question (5) dans ce cas $\dim \operatorname{Ker}(A_0) = 2$. On en déduit que A_0 est diagonalisable.

Si $a \neq \pm 1$ et $a \neq 0$ alors $2(1+a)$ et $2(1-a)$ sont des valeurs propres simples. Or 0 est valeurs propre double et d'après la question (5) dans ce cas $\dim \operatorname{Ker}(A_a) = 2$. On en déduit que A_a est diagonalisable.

Ainsi A_a est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$) pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(6) Après calcul on trouve les sous-espaces propres dans tous les cas suivants :

– Si $a = 1$ alors

$$\begin{aligned}
E_0(A_1) &= \operatorname{Vect}((1,0,0,-1)^\top, (0,1,0,-1)^\top, (0,0,1,-1)^\top) \\
E_4(A_1) &= \operatorname{Vect}((1,1,1,1)^\top)
\end{aligned}$$

Dans ce cas $A_1 = PD_1P^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– Si $a = -1$ alors

$$\begin{aligned}
E_0(A_{-1}) &= \operatorname{Vect}((1,0,0,1)^\top, (0,1,0,-1)^\top, (0,0,1,1)^\top) \\
E_4(A_{-1}) &= \operatorname{Vect}((1,-1,1,-1)^\top)
\end{aligned}$$

Dans ce cas $A_{-1} = PD_{-1}P^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– Si $a = 0$ alors

$$\begin{aligned}
E_0(A_0) &= \operatorname{Vect}((1,0,-1,0)^\top, (0,1,0,-1)^\top) \\
E_2(A_0) &= \operatorname{Vect}((1,0,1,0)^\top, (0,1,0,1))^\top)
\end{aligned}$$

Dans ce cas $A_0 = PD_0P^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si $a \neq \pm 1$ et $a \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} E_0(A_a) &= \mathrm{Vect}((1,0,-1,0)^\top,(0,1,0,-1)^\top) \\ E_{2(1+a)}(A_a) &= \mathrm{Vect}((1,1,1,1)^\top) \\ E_{2(1-a)}(A_a) &= \mathrm{Vect}((1,-1,1,-1)^\top) \end{aligned}$$

Donc $A_a = PD_aP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_a = \begin{pmatrix} 2+2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^3 - 5A^2 + 6A = 0. \qquad (**)$$

(1) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer ses valeurs propres éventuelles.

(2) En déduire toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de trace égale à 7 et vérifiant $(**)$.

Corrigé l'exercice 4. (1) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $A^3 - 5A^2 + 6A = 0$

Le polynôme $P(X) = X^3 - 5X^2 + 6X = X\left(X^2 - 5X + 6\right) = X(X-2)(X-3)$ est un polynôme annulateur de A, scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples. La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines de P, à savoir $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0,2,3\}$.

A est semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux appartiennent à l'ensemble $\{0,2,3\}$: ce peut être par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ldots \text{ etc.}$$

(2) Supposons en plus que $\mathrm{tr}(A) = 7$. Cette matrice diagonale a même trace que A, c'est à dire 7 . Parmi la liste évoquée ci-dessus, les seules matrices qui ont pour trace 7 , sont celles qui ont deux fois le nombre 2, et une fois le nombre 3 sur la diagonale.

Les matrices solutions du problème étudié sont donc celles qui sont semblables à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$