CHAPITRE 5
SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

Table des matières

1. Systèmes différentiels homogènes 2
2. Système différentiels linéaires homogènes : Cas diagonalisable 3
3. Exponentielle de matrices 5
4. Solutions des systèmes différentiels linéaires 10
5. Équations différentielles linéaires d'ordre n 17

Vous savez résoudre les équations différentielles du type $x'(t) = ax(t)$, où la dérivée $x'(t)$ est liée à la fonction $x(t)$. Par exemple, si a est une constante, les fonctions solutions sont les $x(t) = x_0 e^{at}$ (où $x_0 \in \mathbb{R}$). Plus généralement, on apprend à résoudre les équations $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ où a et b sont des fonctions de t. Dans tous les cas, l'exponentielle joue un rôle central dans l'écriture des solutions.

Considérons maintenant le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases} \tag{1}$$

La situation se complique car les équations sont enchevêtrées : $x'(t)$ est liée à $x(t)$, mais aussi à $y(t)$. Donc il faudrait d'abord trouver $y(t)$ pour résoudre la première équation. Mais, dans la seconde équation, $y'(t)$ est liée à $y(t)$, mais aussi à $x(t)$, que l'on n'a pas encore su trouver ! Pour s'en sortir, la solution consiste à considérer le couple $(x(t), y(t))$ comme une seule variable. On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel (1) s'écrit alors simplement :

$$X'(t) = AX(t).$$

On a alors envie de dire que, comme pour une équation du type $x'(t) = ax(t)$, les solutions de ce type d'équation seraient les fonctions définies par

$$X(t) = e^{tA} \cdot X_0$$

(où $X_0 \in \mathbb{R}^2$) et ce sera effectivement le cas, une fois que l'on aura défini ce qu'est l'exponentielle d'une matrice !

Date: 10 décembre 2023 • Khalid Koufany.

1. Systèmes différentiels homogènes

Définition 1.1. *Un* **système différentiel linéaire homogène** *à coefficients constants est un système d'équations différentielles de la forme :*

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

où les $a_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ sont des coefficients constants réels ou complexes. On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Avec cette notation matricielle, le système différentiel (S) devient :

$$X'(t) = AX(t)$$

Remarque 1.2. (a) Résoudre le système linéaire $X' = AX$, avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $A \in M_n(\mathbb{C})$) une matrice constante, c'est donc trouver $X(t)$ dérivable (c'est-à-dire n fonctions $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ dérivables) tel que $X'(t) = AX(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Dans le cas $n = 1$, on retrouve simplement une seule équation que l'on écrit $x'(t) = ax(t)$ et dont les solutions sont les $x(t) = x_0 e^{at}$, pour n'importe quelle constante (réelle ou complexe) x_0.

(c) L'ensemble des solutions est un espace vectoriel. En effet, on prouve facilement que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$: la fonction identiquement nulle est solution et, si X_1 et X_2 sont solutions, alors $\lambda X_1 + \mu X_2$ est aussi solution (avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Exemple 1.3 (Système diagonal)**.** Si A est une matrice diagonale à coefficients réels, alors le système s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ \qquad \vdots \\ x_n'(t) = \lambda_n x_n(t) \end{cases}$$

On résout indépendamment chaque équation $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t)$, dont les solutions sont les $x_i(t) = k_i e^{\lambda_i t}, k_i \in \mathbb{R}$. Les solutions $X(t)$ sont donc les fonctions

$$X(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

où $k_1, \ldots, k_n$ sont des constantes réelles.

Exemple 1.4 (Système triangulaire)**.** Un système triangulaire n'est pas tellement plus compliqué à résoudre. En effet, si A est une matrice triangulaire, on a :

$$\left\{\begin{array}{ccr} x_1' & = & a_{11}x_1 + \cdots + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' & = & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & & \\ x_n' & = & a_{nn}x_n \end{array}\right.$$

On résout le système de proche en proche : on peut d'abord intégrer la dernière équation, puis reporter la solution dans l'équation précédente (qui devient une équation du type $x'(t) = ax(t) + b(t)$) et ainsi en remontant intégrer tout le système.

2. Système différentiels linéaires homogènes : Cas diagonalisable

Voici un premier résultat qui affirme que si on connaît un vecteur propre de A, alors on peut lui associer une solution du système différentiel.

Proposition 2.1. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A et v un vecteur propre associé. Alors la fonction*

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto e^{\lambda t}v$$

est solution du système différentiel $X' = AX$.

Démonstration. Soit $X(t) = e^{\lambda t}v$. On a alors

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}(\lambda v) = e^{\lambda t}Av = AX(t).$$

Cela prouve que $X(t)$ est bien solution du système homogène $X' = AX$. □

Exemple 2.2. Exemple 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(X) = (X-2)^2$, la seule valeur propre de A est donc $\lambda = 2$. Déterminons un vecteur propre : soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $A \cdot V = 2V$; on a alors $x + y = 0$, et le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A. Ainsi l'application $X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$ est une solution du système $X' = AX$, ce que l'on vérifie aussi à la main.

Théorème 2.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Notons $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs propres et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Alors les fonctions $X_i(t) = e^{\lambda_i t}v_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ forment une base de l'espace des solutions du système $X' = AX$.*

Démonstration. Tout d'abord, par la proposition 1 , les $X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$ sont bien des solutions du système différentiel.

Montrons que ces solutions sont linéairement indépendantes. Soient $c_1, \ldots, c_n$ des réels tels que

$$c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t) = 0.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, elle est vraie en particulier pour $t = 0$ où elle devient

$$c_1 V_1 + \cdots + c_n V_n = 0.$$

Cela implique $c_1 = \cdots = c_n = 0$ car les V_i forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, \ldots, V_n$. Alors la matrice $P^{-1}AP = D$ est diagonale.

Soit $X(t)$ une solution du système différentiel $X' = AX$. La matrice de passage P étant inversible, notons $Y = P^{-1}X$ (donc $X = PY$). Alors $Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = DY$. Ainsi Y est la solution d'un système différentiel diagonal :

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases} \qquad \text{d'où } Y(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de P sont les vecteurs $V_1, \ldots, V_n$, alors

$$X(t) = PY(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} V_n = k_1 X_1(t) + \cdots + k_n X_n(t).$$

On vient de prouver que n'importe quelle solution $X(t)$ est combinaison linéaire des $X_i(t)$. Ainsi la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est génératrice de l'espace des solutions.

Conclusion : $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de solutions.

□

Exemple 2.4. On veut résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Valeurs propres et vecteurs propres. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 5$. Les vecteurs propres associés sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Solutions générales. Nous obtenons trois solutions

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{\lambda_2 t} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad X_3(t) = e^{\lambda_3 t} V_3 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système $X' = AX$ sont donc les fonctions de la forme

$$X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) + \gamma X_3(t)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- Condition initiale. On cherche quelle solution vérifie en plus $X(0) = X_0$. Or

$$X(0) = \alpha X_1(0) + \beta X_2(0) + \gamma X_3(0) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

La condition initiale $X(0) = X_0$ se transforme donc en le système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

On trouve $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$. Ainsi l'unique solution qui vérifie le système et la condition initiale est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}$$

3. Exponentielle de matrices

Avant de définir l'exponentielle de matrices, voici quelques petits rappels sur l'exponentielle réelle ou complexe. Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$, l'exponentielle peut être définie par une série :

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

On la note aussi e^z. Retenons quelques propriétés principales :

1. $\exp(0) = 1$,
2. $\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$ $(\forall z, z' \in \mathbb{C})$,
3. $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} (\forall z \in \mathbb{C})$,
4. $\exp(kz) = (\exp(z))^k (\forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z})$.

Une autre propriété essentielle est que l'exponentielle définit une fonction dérivable et (pour $a \in \mathbb{C}$) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(at) = a \exp(at).$$

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant un espace vectoriel de dimension finie sur lequel toutes les normes sont équivalentes, on en choisit une que l'on note $\|\cdot\|$. Par exemple, $\|A\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}(|a_{ij}|)$ (cette notion sera étudiée en L3).

La série de terme général $\frac{1}{k!}a^k$ étant convergente pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{1}{k!}\|A\|^k$ est également convergente pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k$ est convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 3.1 (Admis)**.** *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{A^k}{k!}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}$$

sa limite. C'est la **matrice exponentielle** *de A. On la note aussi e^A.*

Exemple 3.2 (Exponentielle d'une matrice diagonale)**.** Si A est la matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

et donc

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.3 (Exponentielle d'une matrice nilpotente)**.** Soit A une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $N \in \mathbb{N}$. Alors $\exp(A)$ est une somme finie

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{A^k}{k!}.$$

L'exponentielle de matrices (réelles ou complexes) vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 3.4 (Propriétés de l'exponentielle d'une matrice)**.** *On a*

1. Si on note O_n la matrice nulle, alors $\exp(O_n) = I_n$.

2. Si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

3. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $\exp(A)$ est inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$

4. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(kA) = (\exp(A))^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

5 Si $A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et P est inversible, on a $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

Démonstration. 5. On note que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^kP = \left(P^{-1}AP\right)^k$ et l'on revient à la définition de l'exponentielle :

$$\exp\left(P^{-1}AP\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k\right) P = P^{-1}\exp(A)P.$$

□

Exemple 3.5. Montrons que

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

pour tout t réel :

On a $\chi_A(X) = X^2 + 1$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} = \{\pm i\}$ et $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

Donc

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Remarque 3.6 (Méthode de calcul de $\exp(A)$**).** – Si A est diagonale ou nilpotente, il n'y a pas de problème.

– Sinon on utilise la décomposition de Dunford $A = \varDelta + N$ avec $\varDelta$ diagonalisable, N nilpotente et $N\varDelta = \varDelta N$, ce qui permet d'écrire $\exp(A) = \exp(\varDelta) \cdot \exp(N)$. La matrice $\varDelta$ étant diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}\varDelta P$ soit diagonale, soit encore $\triangle = PDP^{-1}$, d'où

$$\exp(\varDelta) = \exp\left(PDP^{-1}\right) = P\exp(D)P^{-1}.$$

On peut donc toujours calculer l'exponentielle d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

– On peut aussi utiliser la réduite de Jordan (voir Remarque 4.4).

Exemple 3.7. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Décomposition de Dunford. La décomposition de Dunford est $A = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ici D est déjà une matrice diagonale puisque $D = 2I_3$, ce qui va simplifier les calculs.

- La matrice diagonale.

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = e^2 I$$

- La matrice N est nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0$$

Ainsi

$$\exp(N) = I + N + \frac{1}{2!}N^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Exponentielle de A.

$$\begin{aligned} \exp(A) = \exp(D)\exp(N) &= \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 & -\frac{1}{2}e^2 \\ \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 & -\frac{3}{2}e^2 \\ -e^2 & e^2 & 2e^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 3.8. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

- Décomposition de Dunford. La décomposition de Dunford est $A = \Delta + N$ avec

$$\Delta = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & 6 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice nilpotente. La matrice N est nilpotente, avec N^2 la matrice nulle. Ainsi $\exp(N) = I + N$.

- La matrice diagonalisable. La matrice Δ se transforme en une matrice diagonale par $D = P^{-1}\Delta P$ où

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{25}{13} & -\frac{24}{13} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{24} & 1 & \frac{13}{24} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{25}{24} & 0 & -\frac{13}{24} \end{pmatrix}.$$

Comme $\Delta = PDP^{-1}$ alors $\exp(\Delta) = \exp\left(PDP^{-1}\right) = P\exp(D)P^{-1}$: avec

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^6 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6} \end{pmatrix}$$

donc

$$\exp(\Delta)=\begin{pmatrix} e^{-6} & 0 & 0\\ \frac{25}{24}\left(e^{6}-e^{-6}\right) & e^{6} & \frac{13}{24}\left(e^{6}-e^{-6}\right)\\ 0 & 0 & e^{-6}\end{pmatrix}$$

- Exponentielle de A.

$$\exp(A)=\exp(\Delta)\cdot\exp(N)=\begin{pmatrix} 2e^{-6} & 0 & e^{-6}\\ \frac{1}{24}\left(25e^{6}-37e^{-6}\right) & e^{6} & \frac{1}{24}\left(13e^{6}-25e^{-6}\right)\\ -e^{-6} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Si $A(t)$ est une matrice dont les coefficients $a_{ij}(t)$ sont des fonctions dérivables de la variable t, alors la dérivée de $A(t)$ est la matrice $A'(t)$ dont les coefficients sont les dérivées $a'_{ij}(t)$. La dérivée d'une matrice vérifie les propriétés usuelles des dérivées. En particulier, elle vérifie que, si les matrices $M(t)$ et $N(t)$ sont dérivables, alors le produit aussi et on a (attention à l'ordre des produits !) :

$$(MN)'(t)=M'(t)N(t)+M(t)N'(t).$$

Proposition 3.9. *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lapplication de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $t\mapsto\exp(tA)$ est dérivable et on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tA))=A\exp(tA)$$

Comme les matrices A et $\exp(tA)$ commutent, alors on a aussi $\frac{d}{dt}\exp(tA)=\exp(tA)A$.

Démonstration. Notons

$$E(t)=\exp(tA)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}t^kA^k=\sum_{k=0}^{+\infty}E_k(t)$$

où $E_k(t)=\frac{1}{k!}t^kA^k$. On a $E_0'(t)=0$ et, pour tout $k>0$,

$$E_k'(t)=\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}A^k=AE_{k-1}(t).$$

Pour des raisons de convergence normale, comme dans le cas des séries de fonctions, on a

$$E'(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}E_k'(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}AE_{k-1}(t)=AE(t).$$

□

Remarque 3.10. Comme les matrices A et $\exp(tA)$ commutent, alors on a aussi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA)=\exp(tA)A$.

Exemple 3.11. Nous avons déjà montrer (voir exemple 3.5) que pour tout réel t

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. Solutions des systèmes différentiels linéaires

Théorème 4.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les solutions du système différentiel homogène $X' = AX$ sont les fonctions $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définies par*

$$X(t) = \exp(tA) \cdot X_0$$

où X_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ quelconque.

Démonstration. D'une part, la dérivée de $\exp(tA)$ est $A\exp(tA)$, donc $X(t) = \exp(tA) \cdot X_0$ est bien solution de l'équation $X' = AX$.

Réciproquement, si on pose $Y(t) = \exp(-tA)X(t)$, alors

$$Y'(t) = \exp(-tA)\,(X' - AX) = 0.$$

Donc, sur $\mathbb{R}, Y$ est une fonction constante que l'on note $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Ainsi $X(t) = \exp(tA) \cdot X_0$ pour tout t. □

Corollaire 4.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *Pour $X_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, il existe une et une seule solution $X(t)$ vérifiant le système différentiel $X' = AX$ et la condition initiale $X(0) = X_0$.*

Remarque 4.3 (Pratique de résolution en utilisant la décomposition de Dunford)**.** Soit le système différentiel linéaire $X' = AX$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Trouver la forme des solutions : $X(t) = e^{tA}X_0$ où $X_0 \in \mathbb{R}^n$
2. Réduction à la forme $D + N$.

Si le polynôme caractéristique de A est scindé, alors la décomposition de Dunford permet d'écrire A sous la forme $A = \Delta + N$ avec Δ diagonalisable et N nilpotente avec $\Delta N = N\Delta$. Autrement dit, il existe une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP = D + N'$ avec D diagonale, N' nilpotente et $N'D = DN'$. On note cette matrice $B = P^{-1}AP = D + N'$.

3. Équation en Y.

Posons $Y = P^{-1}X$ (donc $X = PY$). L'équation $X' = AX$ devient une équation en Y :

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = BY.$$

4. Solutions en Y.

Les solutions $Y(t)$ sont donc de la forme $Y(t) = e^{tB}V$ où $V \in \mathbb{R}^n$. De plus,

$$e^{tB} = e^{tD+tN'} = e^{tD}e^{tN'}$$

et les matrices e^{tD} et $e^{tN'}$ sont faciles à calculer puisque D est diagonale et N' est nilpotente.

5. Solutions en X.

On obtient alors $X(t) = PY(t) = Pe^{tB}V$ avec $V \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme

$$X(t) = Pe^{tD}e^{tN'}V \qquad \text{avec } V \in \mathbb{R}^n$$

et il est inutile de calculer la matrice P^{-1}.

Remarque 4.4 (Pratique de résolution en utilisant la réduction de Jordan)**.** Les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont de la forme $X(t) = e^{tA}X_0$ avec $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

Pour calculer e^{tA} on peut aussi utiliser la réduction de Jordan de A (rappelons que A doit être scindé). Il existe donc une matrice P inversible telle que

$$A = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix} P^{-1}$$

où les $J_{n_i}(\lambda_i)$ sont des blocs de Jordan.

L'exponentielle de tA est donc réduit à l'exponentielle d'une matrice diagonale par blocs,

$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_{n_1}(\lambda_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tJ_{n_2}(\lambda_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{tJ_{n_r}(\lambda_r)} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Or un bloc de Jordan $J_p(\lambda)$ se décompose comme $J_p(\lambda) = \lambda I_p + J_p$ avec

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

nilpotente et commute à λI_p.

La formule du binôme de Newton fournit, puisque J_p est nilpotente d'ordre p :

$$J_p(\lambda)^k = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} J^i$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{k}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{k}{p-1}\lambda^{n-p+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{k}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

et par suite

$$e^{tJ_p(\lambda)} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et les solutions du système différentiel sont

$$X(t) = Pe^{tJ}V \quad \text{avec} \;\; V \in \mathbb{R}^n$$

et il est inutile de calculer la matrice P^{-1}.

Exemple 4.5. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - 6x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases}$$

avec pour « conditions initiales » : $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0$.

1. Forme des solutions.

La matrice du système différentiel est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système $X' = AX$ sont les $X(t) = \exp(tA)X_0$. Ici la condition initiale est $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Réduction à la forme $D + N$.

La décomposition de Dunford de A s'écrit ici $P^{-1}AP = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

D est bien diagonale ; N est nilpotente, car $N^2 = 0$; et $DN = ND$.

3. Équation en Y.

Posons $Y = P^{-1}X$ (donc $X = PY$). Posons $B = P^{-1}AP = D + N$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

L'équation $X' = AX$ devient une équation de Y : $Y' = BY$.

4. Solutions en Y.

Les solutions de $Y' = BY$ sont les $Y(t) = \exp(tB)V, V \in \mathbb{R}^n$.

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \quad \exp(tN) = I+tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3t+1 & 3t \\ 0 & -3t & 3t+1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\exp(tB) = \exp(tD+tN) = \exp(tD)\exp(tN) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (-3t+1)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & -3te^{2t} & (3t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

5. Solutions en X.

Les solutions du système $X' = AX$ sont les

$$X(t) = P\exp(tB)V = \begin{pmatrix} e^t & (-3t+1)e^{2t} & 3te^{2t} \\ \frac{1}{2}e^t & -3te^{2t} & (3t+1)e^{2t} \\ 0 & \left(t+\frac{2}{3}\right)e^{2t} & -(t+1)e^{2t} \end{pmatrix} V$$

6. Solution en X avec condition initiale.

On veut $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mais, en $t = 0$, la solution $X(t) = P\exp(tB)V_0$ conduit à $X(0) = PV_0$, d'où $V_0 = P^{-1}X_0$. On trouve

$$V_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors $X(t) = P\exp(tB)V_0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1(t) = (-3t+3)e^{2t} - 2e^t \\ x_2(t) = (-3t+2)e^{2t} - e^t \\ x_3(t) = te^{2t} \end{cases}$$

Exemple 4.6. On va donner maintenant un exemple en utilisant la réduite de Jordan.

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 10x_2(t) - 3x_3(t) + 16x_4(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t) - 2x_3(t) + 9x_4(t) \\ x_3'(t) = -2x_1(t) + 6x_2(t) + 2x_3(t) - 10x_4(t) \\ x_4'(t) = x_2(t) - x_4(t) \end{cases}$$

Sous forme matriciel, notre système s'écrit $X'(t) = AX(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -3 & 16 \\ 3 & -5 & -2 & 9 \\ -2 & 6 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A(\lambda) = \lambda^3(1-\lambda)$ est scindé et $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$. Nous trouvons la réduite de Jordan de A (voir chapitre 4). On trouve que $A = PJP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Jordan J contient deux blocs de Jordan : $J = \mathrm{diag}(J_1(1), J_3(0))$. On a alors

$$e^{tJ_1(1)} = e^t, \quad e^{tJ_3(0)} = e^{t\times 0} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi la solution générale de notre système est

$$X(t) = Pe^{tJ}V, \quad \text{avec} \quad V \in \mathbb{R}^4$$

ou encore

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 2 & 2t+1 \\ 2e^t & 1 & t+1 & \frac{1}{2}t^2+t \\ 0 & 2 & 2t & t^2+1 \\ e^t & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha e^t + 2\gamma + \delta(2t+1) \\ 2\alpha e^t + \beta + \gamma(t+1) + \delta(\frac{1}{2}t^2 + t) \\ 2\beta 2\gamma t + \delta(t^2+1) \\ \alpha e^t + \beta + \gamma t + \delta\frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi pour chaque quadruple $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ on a une solution

$$\begin{cases} x_1(t) & = \alpha e^t + 2\gamma + \delta(2t+1) \\ x_2(t) & = 2\alpha e^t + \beta + \gamma(t+1) + \delta(\frac{1}{2}t^2 + t) \\ x_3(t) & = 2\beta 2\gamma t + \delta(t^2+1) \\ x_4(t) & = \alpha e^t + \beta + \gamma t + \delta\frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

On va considérer maintenant un système différentiel linéaire (non-homogène)

$$X'(t) = AX(t) + b(t)$$

où

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad b(t) \in \mathbb{R}^n$$

et on va supposer pour simplifier l'énoncé que $t \mapsto b(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4.7. *La solution général du système différentiel $X'(t) = AX(t) + b(t)$ avec la condition initial $X(t_0) = X_0$ est donnée par*

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds$$

Démonstration. Soit pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_0(t) := \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds$. Montrons que φ_0 est solution du système.

Remarquons d'abord que puisque tA et sA commutent alors $e^{(t-s)A} = e^{tA}e^{-sA}$ et $\varphi_0(t) = e^{tA}\int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds$. De plus

$$\varphi_0'(t) = Ae^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}b(s)ds + e^{tA}e^{-tA}b(t) = A\varphi_0(t) + b(t)$$

D'où le résultat.

□

Exemple 4.8. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) & = x(t) + y(t) \\ y'(t) & = y(t) + t \\ z'(t) & = 2z(t) \end{cases}$$

Le système est de la forme $X'(t) = AX(t) + b(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

La matrice A n'est pas diagonalisable. Elle est triangulaire supérieure par blocs (c'est sa propre réduite de Jordan). Le premier bloc est $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente, $N^2 = 0$. Par conséquent $e^{tC} = e^t[I_2 + tN]$ et

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^{(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour tout $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$,

$$X_H(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^t + \mu te^t \\ \mu e^t \\ \nu e^{2t} \end{pmatrix}$$

est solution du système homogène.

Une solution particulière du système non-homogène est donnée par

$$X_P(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds$$

Or

$$e^{(t-s)A} b(s) = \begin{pmatrix} e^{t-s} & (t-s)e^{t-s} & 0 \\ 0 & e^{t-s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(t-s)r^{t-s} \\ se^{t-s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple donne

$$\int_0^t s(t-s)e^{t-s} ds = e^t(t-2) + t + 2, \ \int_0^t s^{t-s} ds = e^t - t - 1.$$

Il s'ensuit que

$$Y_P(t) = \begin{pmatrix} e^t(t-2) + t + 2 \\ e^t - t - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $X_H(t) + X_P(t)$ (c' est la solution qui passe par lorsque $t = 0$ par (λ, μ, ν))

5. Équations différentielles linéaires d'ordre n

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = 0 \qquad (E)$$

où la fonction inconnue est une fonction $t \mapsto x(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n-fois dérivable. On introduit les fonctions auxiliaires

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x_1' = x' \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = x_{n-2}' = x^{(n-2)} \\ x_n = x_{n-1}' = x^{(n-1)} \end{cases}$$

L'équation (E) se transforme alors en le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1 \end{cases}$$

Ainsi résoudre l'équation (E) est équivalent à résoudre le système différentiel

$$X'(t) = AX(t)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *Soient* $t_0 \in \mathbb{R}, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ *fixés. Il existe une et une seule fonction* $x(t)$ *qui vérifie*

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = 0$$

ainsi que toutes les conditions initiales :

$$x(t_0) = c_0, \quad x'(t_0) = c_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

Corollaire 5.2. *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est un espace vectoriel de dimension n.*

Un calcul simple de déterminant justifie le lien entre : l'équation différentielle (E), les racines de l'équation caractéristique $\chi_A(X) = 0$ et les valeurs propres de A.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = (-1)^n \left(X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n\right)$$

où les a_i sont les coefficients de l'équation différentielle (E).

Théorème 5.3. *Soit l'équation différentielle*

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = 0$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ les racines deux à deux distinctes du polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ et $m_1, m_2, \dots, m_r$ les multiplicités. Autrement dit :

$$\chi_A(X) = (-1)^n \left(X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n\right) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}.$$

Alors chaque solution $x(t)$ de l'équation différentielle est la partie réelle de

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(t) e^{\lambda_k t}$$

pour des polynômes P_k de degré $< m_k$, pour tout k.

URL: `http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Alg-Lin2/`