CHAPITRE 4
TRIGONALISATION

Table des matières

Dans tout ce chapitre désigne $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}, \mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On notera $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin, on notera E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.

1. Endomorphismes et matrices trigonalisables

Soit f dans $\mathcal{L}(E)$. II n'est pas toujours possible de trouver une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. Nous chercherons alors une base dans laquelle la matrice de f est la plus simple possible.

Définition 1.1. *Un endomorphisme f de E est dit* **trigonalisable** *s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure. Une telle base est dite base de trigonalisation de l'endomorphisme f*

Remarque 1.2. (1) Un endomorphisme diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

(2) Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure. Alors la matrice de f dans la base $B' = (e_n, \dots, e_1)$ est triangulaire inférieure. C'est pour cette raison que nous étudierons uniquement le cas des matrices triangulaires supérieures.

Trigonaliser un endomorphisme signifie trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Réduire un endomorphisme signifie trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale ou triangulaire supérieure.

Proposition 1.3. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de l'espace E. On a équivalence entre :*

(i) la base $\mathcal{B}$ trigonalise un endomorphisme f ;

Date: 10 décembre 2023 • Khalid Koufany.

(ii) $\forall 1 \leqslant k \leqslant n,$ *Vect* $(e_1, \ldots, e_k)$ *est stable par* f*.*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si la matrice $A = (a_{i,j})$ de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure alors

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ f(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k).$$

On en déduit

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ f(e_1), \ldots, f(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$$

puis (ii) par combinaison linéaire.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons (ii). On a en particulier

$$\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ f(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$$

et donc la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure. □

Corollaire 1.4. *Le premier vecteur d'une base de trigonalisation est un vecteur propre de l'endomorphisme.*

Définition 1.5. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Autrement dit,*

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}), \quad A = PTP^{-1}.$$

Proposition 1.6. *Soit A la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathcal{B}$ de E. On a équivalence entre :*

(i) A est trigonalisable ;

(ii) f est trigonalisable.

Démonstration. Evident, car les matrices semblables à A correspondent à celles pouvant représenter l'endomorphisme f dans d'autres bases. □

2. Caractérisation

Théorème 2.1. *(1) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :*

(i) f est trigonalisable ;

(ii) χ_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

(2) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a équivalence entre :

(i) A est trigonalisable ;

(ii) χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. (1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si f est trigonalisable, il existe une base de E dans laquelle la matrice T de f est triangulaire.

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique

$$\pi_f(X) = \det(T - XI_n) = \prod^{n} (a_{i,i} - X).$$

est donc scindé, les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont les valeurs propres de f.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons que le polynôme caractéristique de f est scindé. Montrons que f est trigonalisable par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, c'est immédiat.

Supposons que ce résultat soit vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à un entier $n \geqslant 2$ et pour tout endomorphisme de cet espace dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$.

Notons λ une racine de χ_f. Il existe un vecteur propre v_1 tel que $f(v_1) = \lambda v_1$. Prenons un supplémentaire, H, de $\mathbb{K}v_1$. On a $E = \mathbb{K}v_1 \oplus H$ et donc $\dim H = n-1$. Rien ne permet d'affirmer que H est stable par f.

Soit p la projection sur H de direction $\mathbb{K}v_1$. L'application $g = p \circ f_{|H}$ est un endomorphisme de H.

Vérifions que nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme g de H. Pour toute base $\mathcal{B}$ de H, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 = (v_1, \mathcal{B})$ est de la forme

$$M_{\mathcal{B}_1}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & \\ \vdots & M_{\mathcal{B}}(g) \\ 0 & \end{array}\right)$$

avec L dans $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $M_{\mathcal{B}}(g)$ dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, matrice de g dans la base B. On a

$$\chi_f(X) = (\lambda - X)\det\left(M_{\mathcal{B}}(g) - XI_{n-1}\right) = (\lambda - X)\chi_g(X).$$

Le polynôme caractéristique de g divise celui de f. Il est donc scindé sur $\mathbb{K}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à g et il existe une base $\mathcal{B}'$ de H dans laquelle la matrice de g est triangulaire supérieure. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'_1 = (v_1, \mathcal{B}')$ est triangulaire supérieure.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit f l'endomorphisme de K^n naturellement associé à A donné par $v \mapsto Av$. Alors d'après la proposition 1.6 A est trigonalisable $\Leftrightarrow f$ est trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_A = \chi_f$ est scindé.

On aurait pu commencer par montrer le théorème pour les matrices et déduire le résultat pour les endomorphismes. Nous donnons ci-dessous (par curiosité une preuve directe pour les matrices.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons A trigonalisable. Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = \chi_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(t_{ii} - \lambda)$, donc χ_A est scindé sur K.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que si le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est scindé alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

SI $n = 1$: C'est immédiat, une matrice $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ étant déjà triangulaire supérieure.

Supposons la propriété établie au rang $n - 1 \geqslant 1$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique χ_A scindé. Le polynôme χ_A possède au moins une racine λ_1 est celle-ci est valeur propre de A. Soit $e_1 \in \mathbb{K}^n$ un vecteur propre associé. On complète ce vecteur en une base de $\mathbb{K}^n$ de la forme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. La matrice de l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A dans la base e est de la forme

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \star \\ \hline 0 & A' \end{array}\right).$$

On a alors

$$\chi_A(X) = (X - \lambda)\chi_{A'}(X)$$

et donc le polynôme caractéristique de A' est scindé. Par hypothèse de récurrence, il existe $P' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que la matrice $P'^{-1}A'P'$ soit triangulaire supérieure. Considérons alors la matrice

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P' \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

La matrice P est inversible avec

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P'^{-1} \end{array}\right).$$

Par produit par blocs

$$P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \star' \\ \hline 0 & P'^{-1}A'P' \end{array}\right)$$

est triangulaire supérieure.

Finalement, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure. □

Remarque 2.2. La diagonalisation, si elle est possible, détermine une matrice diagonale unique à l'ordre près des termes de la diagonale. En revanche, la trigonalisation ne détermine pas une matrice triangulaire unique, il y a cependant unicité des termes de la diagonale à l'ordre près.

Corollaire 2.3. *Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie est trigonalisable.*
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démonstration. D'après le théorème de d'Alembert, le polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{C}$. □

Exemple 2.4. Soit $n \geqslant 2$ un entier et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que A n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable, et trigonaliser A.

Remarquons que $\mathrm{rg}(A) = 1$, d'où (théorème du rang) $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A) \geqslant$ donc A admet 0 pour valeur propre d'ordre de multiplicité $\geqslant n-1$, puisque $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n-1$. Il existe donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda_1).$$

On a d'une part,

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \underbrace{0 + \cdots 0}_{(n-1) \text{ fois}} = \lambda_1$$

et d'autre part

$$\mathrm{tr}(A) = \underbrace{1 + \cdots 1}_{(n-1) \text{ fois}} + (n-1) = 0$$

donc $\lambda_1 = 0$. Ainsi, A admet une valeur propre et une seule, qui est 0, et est d'ordre de multiplicité n ; comme $\dim(E_0(A)) = n - 1 \neq n$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Le sous-espace propre $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ a pour équation $x_1 + \ldots + x_{n-1} + (1-n)x_n = 0$, donc admet pour base $(v_1, \cdots, v_{n-1})$ où

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1, -1, 0, 0, \cdots, 0)^\top, \\
v_2 &= (1, 0, -1, 0, \cdots, 0)^\top, \\
&\vdots \\
v_{n-2} &= (1, 0, 0, \cdots, 0, -1, 0)^\top, \\
v_{n-1} &= (1, 1, 1, \cdots, 1, 1)^\top.
\end{aligned}$$

Soit

$$v_n = (1, 0, \cdots, 0, 0)\top.$$

On a $\mathbb{R}v_n \oplus \mathrm{Ker}(A) = \mathbb{R}^n$, car $v_n \notin \mathrm{Ker}(A)$, (en effet $Av_n = v_{n-1}$), donc $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.

Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix}
1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & -1 & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Donc $A = PTP^{-1}$ où

$$T = \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Corollaire 2.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. S'il existe un polynôme annulateur de f, scindé sur $\mathbb{K}$, alors f est trigonalisable sur $\mathbb{K}$.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe un polynôme annulateur de A, scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est trigonalisable sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Dans ce cas, le polynôme minimal est scindé sur $\mathbb{K}$. Le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{C}$ et ses racines sont les mêmes que celles du polynôme minimal. Il est donc également scindé sur $\mathbb{K}$. □

Corollaire 2.6. *Si le polynôme caractéristique χ_f de $f \in \mathcal{L}(E)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ alors $\operatorname{tr}(f)$ et $\det(f)$ sont la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.*
Si le polynôme caractéristique χ_A de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ alors $\operatorname{tr}(A)$ et $\det(A)$ sont la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.

Démonstration. f est trigonalisable et peut donc être représenté par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de f est alors

$$\prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - X)$$

Les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont alors les valeurs propres comptées avec multiplicité. Parallèlement $\operatorname{tr}(f) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ et $\det(f) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. □

Remarque 2.7. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le résultat qui précède s'applique automatiquement.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut interpréter $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et affirmer que $\operatorname{tr}(A)$ et et $\operatorname{tr}(A)$ sont la somme et le produit des valeurs propres complexes de A comptées avec multiplicité.

Exemple 2.8. *Déterminons les valeurs propres de*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \neq O_n$$

La matrice A étant de rang 1, $\dim E_0(A) = \dim \ker A = n - 1$. Donc 0 est alors valeur propre de A de multiplicité au moins $n - 1$. Le polynôme χ_A s'écrit alors

$$\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda)$$

Il est donc scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et la trace de A est alors la somme des valeurs propres de A. On en déduit

$$\operatorname{Sp} A = \{0, a_1 + \cdots + a_n\}$$

3. Trigonalisation

Pour trigonaliser une matrice, il n'y a pas de méthode globale à connaitre à priori. La trigonalisabilité d'une matrice s'obtient après le calcul de son polynôme caractéristique et le constat que ce polynôme est scindé sur le corps de référence de la matrice.

Pour des matrices de grandes tailles, on peut parfois suivre le protocole de trigonalisation par induction (en progressant pas à pas) déduit de la démonstration du théorème 2.1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Pour trigonaliser A, on détermine λ_1 valeur propre de A et v_1 vecteur propre associé. Le vecteur v_1 définit la première colonne d'une matrice de passage Q que l'on construit inversible (on prend un supplémentaire H de $\mathbb{K}v_1$ et on choisit une base adaptée à la somme directe). On a alors

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

avec A' trigonalisable. En déterminant P' inversible telle que

$$P'^{-1}A'P' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on forme alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$$

et alors

$$P^{-1}Q^{-1}AQP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

de sorte que $R = QP$ trigonalise la matrice A.

On verra plus loin qu'il y a une méthode plus rapide de trigonalisation : réduction de Jordan.

Pour les matrices de petites tailles, on peut aussi suivre ce qu'on appelle la **trigonalisation standard** et qu'on va expliquer dans les exemples de matrices 3×3 suivants :

Exemple 3.1 (A a deux valeurs propres, l'une simple et l'autre double et A n'est pas diagonalisable)**.** Dans ce cas le sous-espace propre pour la valeur propre double est forcément de dimension un.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$\chi_A(x) = (x-1)\cdot(x-2)^2.$$

Les espaces propres de A sont

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\,(v_1))\,, E_2(A) = \mathrm{Vect}\,(v_2)$$

où $v_1 = (1,1,1)^\top, v_2 = (0,1,-1)^\top$.
La matrice A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable (car χ_A est scindé). On choisit v_3 formant avec v_1, v_2 une base de $\mathbb{R}^3$, alors l'endomorphisme naturel f associé à A a pour matrice dans cette nouvelle base

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

puisque la trace de T étant égale à celle de A, elle vaut 5 on a

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si on prend par exemple $v_3 = (1,1,0)^\top$ alors on doit avoir $Av_3 = av_1 + b_2 + 2v_3$, c-à-d.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ a+b+2 \\ a-b \end{pmatrix}$$

On trouve alors $a = 0$ et $b = -1$, donc $f(v_3) = -v_2 + 2v_3$. On en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$$

avec $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, et si on pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $A = PTP^{-1}$.

Exemple 3.2 (A a une valeur propre et le sous-espace propre est de dimension un)**.** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\chi_A(x) = (x-1)^3$$

et

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)$$

où $v_1 = (1,0,0)^\top, v_2 = (0,-1,1)^\top$. Pour trigonaliser A on choisit un vecteur v_3 de sorte que (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que $f(v_3) = av_1 + bv_2 + v_3$. La matrice de f dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour cela on suit la même méthode que dans l'exemple précédent : on peut prendre par exemple $v_3 = (0,1,1)$. Donc $f(v_3) = (0,-1,3) = 2v_2 + v_3$; Ainsi si on pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } : T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors $A = PTP^{-1}$.

Exemple 3.3 (A à une valeur propre triple et le sous-espace propre est de dimension un)**.** Soit de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On a

$$\chi_A(X) = (2-X)^3$$

Il est scindé. La matrice A est trigonalisable. Si A était diagonalisable, on aurait $A = 2\mathrm{I}_3$. Par conséquent, la matrice A n'est pas diagonalisable. On obtient

$$E_2(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$$

où $v_1 = (1,1,0)^\top$. Appliquons la méthode de la démonstration du théorème 2.1.

Soit $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ un supplémentaire de $\mathbb{R}v_1$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On a

$$f(e_1) = (1,1,-2)^\top = v_1 - 2e_3.$$
$$f(e_3) = (3,1,4)^\top = v_1 + 2e_1 + 4e_3.$$

La matrice de f dans la base (v_1, e_1, e_3) est

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Soit $g = f_{|H}$ l'endomorphisme de H de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_3). Son polynôme caractéristique est $(2-X)^2$. Un vecteur $v = xe_1 + ye_3 \in E_2(g)$ est vérifie les équations

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à $x = y$. On en déduit que

$$E_2(g) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3).$$

Posons $v_2 = e_1 + e_3 = (1,0,1)^\top$. On complète la famille (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^3$. On peut prendre par exemple (v_1, v_2, v_3) où $v_3 = e_1$. Calculons la matrice de f dans cette base.On a

$$f(v_1) = 2v_1$$
$$f(v_2) = f(e_1 + e_3) = 2v_1 + 2(e_1 + e_3)$$
$$f(v_3) = f(e_1) = v_1 - 2(e_1 + e_3) + 2e_1.$$

La matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) est donc

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Endomorphismes nilpotents

Définition 4.1. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est **nilpotent(e)** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$).

Le plus petit entier p vérifiant cette identité est appelé indice de nilpotence de f (resp. A).

Remarque 4.2. (1) Si $f^p = 0$, alors $f^{p+k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(2) Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ alors la matrice A est nilpotente si, et seulement si, l'endomorphisme f l'est.

Exemple 4.3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente car $A^2 = O_2$, d'indice de nilpotence 2.

Exemple 4.4. Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \star & & \star \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \star \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc}$$

Montrons que $A^n = O_n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On a $f(e_1) = 0$ et pour tout $2 \leqslant i \leqslant n$, on a $f(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1})$. Par suite

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \subset \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$$

puis

$$\operatorname{Im} f^2 \subset f(\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})) = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_{n-1})) \subset \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-2})$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n-1, \operatorname{Im} f^k = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-k-1})$$

En particulier $\operatorname{Im} f^{n-1} \subset \operatorname{Vect}(e_1)$ puis $\operatorname{Im} f^n \subset \{0_E\}$ ce qui donne $f^n = \mathbf{0}$. On peut alors conclure $A^n = O_n$.

Théorème 4.5. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les trois points suivants sont équivalents :*

(1) *f est nilpotent,*

(2) *le polynôme caractéristique de f est $(-1)^n X^n$,*

(3) *f est trigonalisable avec 0 pour seule valeur propre,*

(4) *il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure stricte (c-à-d. à diagonale nulle).*

Démonstration. Il est claire qu'on a (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4).

(1) $\Rightarrow$ (2) : Si f est nilpotent, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. l'endormorphisme f est annulé par un polynôme de la forme X^p. II est donc trigonalisable et, par suite, scindé, de spectre réduit à $\{0\}$. Son polynôme caractéristique est donc $(-1)^n X^n$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Si $\chi_f(X) = (-1)^n X^n$, l'endomorphisme f est scindé et il existe une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure. Comme la diagonale de cette matrice est formée de la liste des valeurs propres de f, cette matrice, est triangulaire supérieure stricte. L'exemple 4.4 montre alors que f est nilpotent. □

Exemple 4.6. D'après le théorème précédent, un endomorphisme nilpotent f est diagonalisable si, et seulement si, il est nul.

Du théorème 4.5 et de l'exemple 4.4 on a obtient :

Corollaire 4.7. *Si f est un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n alors $f^n = 0$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente alors $A^n = O_n$.*

5. Sous-espaces caractéristiques

Nous avons vu que, lorsque f est diagonalisable, on a $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(f)$ avec $E_{\lambda_i}(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i. Nous allons démontrer que même si f n'est pas diagonalisable, mais si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, on peut écrire

$$E = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_r \mathrm{id}_E)^{m_r},$$

où m_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i comme racine du polynôme caractéristique de f.

Définition 5.1. Soit f un endomorphisme de E. Soit λ une valeur propre de f et soit m sa multiplicité en tant que racine de χ_f. Le **sous-espace caractéristique** ou **sous-espace spectral** de f pour la valeur propre λ est

$$N_\lambda = N_\lambda(f) = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id}_E)^m\right)$$

Pour λ valeur propre de f, on a $E_\lambda(f) \subset N_\lambda(f)$, car $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E)^k$ quel que soit $k \geqslant 1$.

Exemple 5.2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

On a

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_4) = (X-3)(X-1)^3.$$

La valeur propre 3 est de multiplicité 1 et la valeur propre 1 est de multiplicité 3 . - Sous-espace caractéristique associé à $\lambda = 3$. Comme la multiplicité de cette valeur propre est 1 alors le sous-espace caractéristique est aussi le sousespace propre :

$$N_3(A) = \operatorname{Ker}(A - 3I_4)^1 = E_3(A) = \mathbb{R}v_1$$

où $v_1 = (0,0,0,1)^\top \in N_3$.

- Sous-espace caractéristique associé à $\lambda = 1$. La multiplicité de cette valeur propre est 3 , donc $N_1(A) = \operatorname{Ker}(A - I_4)^3$. On a :

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Donc $N_1(A)$ a pour équation $16x - 4y - 4z + 8t = 0$. On trouve $N_1(A) = \operatorname{Vect}(v_2, v_3, v_4)$ où

$$v_2 = (1,4,0,0)^\top \quad v_3 = (1,0,4,0)^\top \quad v_4 = (1,0,0,-2)^\top.$$

Théorème 5.3. *Soit f un endomorphisme de E tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Notons $\chi_f(X) = \pm(X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant r, N_{\lambda_i}(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i}$ le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i. Alors :*

(1) *chaque $N_{\lambda_i}(f)$ est stable par f.*
(2) $E = N_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_r}(f)$.
(3) $\dim N_{\lambda_i}(f) = m_i$.

Démonstration. (1) Soit $x \in N_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E)^m$. On a $(f - \lambda \operatorname{id}_E)^m(x) = 0$. Or

$$(f - \lambda \operatorname{id}_E)^m \circ f(x) = f \circ (f - \lambda \operatorname{id}_E)^m(x) = 0,$$

d'où $f(x) \in N_\lambda$.

(2) C'est une application du lemme des noyaux. On rappelle que

$$\chi_f(X) = \pm\,(X-\lambda_1)^{m_1}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}\,.$$

Les polynômes $(X-\lambda_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux puisque les valeurs propres sont distinctes. Par le lemme des noyaux, on obtient

$$\operatorname{Ker}\chi_f(f) = \operatorname{Ker}\,(f-\lambda_1\,\mathrm{id}_E)^{m_1}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}\,(f-\lambda_r\,\mathrm{id}_E)^{m_r} = N_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus N_{\lambda_r}.$$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_f(f)=0$, donc $\operatorname{Ker}\chi_f(f) = E$, d'où le résultat.

(3) Notons $g_i = f_{|N_{\lambda_i}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Pour $i \neq j, N_{\lambda_i}\cap N_{\lambda_j} = \{0\}$. Or $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$, donc la seule valeur propre possible de g_i est λ_i. Le polynôme caractéristique de g_i est scindé (car il divise celui de f) et sa seule racine est la seule valeur propre de g_i, c'est-à-dire λ_i. Ainsi, $\chi_{g_i}(X) = \pm\,(X-\lambda_i)^{n_i}$ (où $n_i = \dim N_{\lambda_i}$). De plus,

$$\begin{aligned}\pm\,(X-\lambda_1)^{m_1}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r} &= \chi_f(X) = \chi_{g_1}(X)\cdots\chi_{g_r}(X)\\ &= \pm\,(X-\lambda_1)^{n_1}\cdots(X-\lambda_r)^{n_r}\end{aligned}$$

D'où, en identifiant les exposants des facteurs irréductibles, on a $n_i = \dim N_i = m_i$, pour $1\leqslant i\leqslant r$. □

Exemple 5.4. Reprenons l'exemple 5.2 avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0\\ -3 & 4 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 9 & -5 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

3 est valeur propre de multiplicité 1 , et on a bien $\dim N_3 = 1$,
1 est valeur propre de multiplicité 3 , et on a bien $\dim N_1 = 3$.
On a bien $\mathbb{R}^4 = N_3\oplus N_1 = \operatorname{Ker}(A-3I_4)\oplus\operatorname{Ker}((A-I_4)^3)$.

6. Décomposition de Dunford

Nous allons démontrer que les endomorphismes nilpotents et les endomorphismes diagonalisables permettent de décrire tous les endomorphismes dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire ceux trigonalisables).

Théorème 6.1 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit f un endomorphisme de E tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (n,d) d'endomorphismes tel que :*
(i) n est nilpotent et d est diagonalisable,
(ii) $f = n+d$,
(iii) $n\circ d = d\circ n$ (d et n commutent).

Démonstration. **Existence :** Soit χ_f le polynôme caractéristique de f qui, par hypothèse, est scindé sur $\mathbb{K}$,

$$\chi_f(X) = \pm\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}\,.$$

Soient $N_{\lambda_1}, \ldots, N_{\lambda_r}$ les sous-espaces caractéristiques de f. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on a

$$N_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m_i} \qquad \text{et} \qquad E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_r}.$$

Nous allons définir l'endomorphisme d sur chaque N_{λ_i} de la manière suivante : pour tout $x \in N_{\lambda_i}$, on pose

$$d(x) = \lambda_i x.$$

L'espace vectoriel E étant somme directe des N_{λ_i}, d est défini sur E tout entier. En effet, si $x \in E$ est décomposé en $x = x_1 + \cdots + x_r$ avec $x_i \in N_{\lambda_i}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant r$), alors

$$d(x) = d(x_1 + \cdots + x_r) = d(x_1) + \cdots + d(x_r) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on pose $d_i = d_{|N_{\lambda_i}} = \lambda_i \mathrm{id}_{N_{\lambda_i}}$. On pose enfin

$$n(x) = f(x) - d(x)$$

Il nous reste à vérifier que n et d conviennent.

Par construction, d est diagonalisable. En effet, fixons une base pour chaque sous-espace N_{λ_i}. Pour chaque vecteur x de cette base, $d(x) = \lambda_i x$. Comme E est somme directe des N_{λ_i} alors, dans la base de E formée de l'union des bases des $N_{\lambda_i}(1 \leqslant i \leqslant r)$, la matrice de d est diagonale.

On a défini $n = f - d$. Comme N_{λ_i} est stable par n (car c'est vrai pour f et d). On pose $d_i = d_{|N_{\lambda_i}} = \lambda_i \operatorname{id}_{N_{\lambda_i}}$ et $n_i = n_{|N_{\lambda_i}} = f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{id}_{N_{\lambda_i}}$. C'est un endomorphisme de N_{λ_i}. Alors, par définition, $N_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(n_i^{m_i})$, et donc $n_i^{m_i} = 0$. Ainsi, en posant $m = \max m_i (1 \leqslant i \leqslant r)$, puisque n^m s'annule sur chaque N_{λ_i}, alors $n^m = 0$, ce qui prouve que n est nilpotent.

On va vérifier que $d \circ n = n \circ d$. Si $x \in E$, il se décompose en $x = x_1 + \cdots + x_r$ avec $x_i \in N_{\lambda_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Sur chaque $N_{\lambda_i}, d_{|N_{\lambda_i}} = \lambda_i \mathrm{id}_{N_{\lambda_i}}$ donc commute avec tout endomorphisme. En particulier, $d \circ n(x_i) = n \circ d(x_i)$ puisque N_{λ_i} est stable par n. On a donc $d \circ n(x) = d \circ n(x_1 + \cdots + x_r) = d \circ n(x_1) + \cdots + d \circ n(x_r) = n \circ d(x_1) + \cdots + n \circ d(x_r) = n \circ d(x)$. Ainsi, d et n commutent.

Unicité : Supposons que (n, d) soit le couple construit ci-dessus et soit (n', d') un autre couple vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii) de la décomposition de Dunford.

Montrons que d et d' commutent, ainsi que n et n'. On a $f = d + n = d' + n'$, d'où

$$d \circ f = d \circ (d + n) = d \circ d + d \circ n = d \circ d + n \circ d = (d + n) \circ d = f \circ d.$$

Ainsi, f et d commutent et on montre de même que f et d' commutent, donc d et d' commutent.

Montrons que N_{λ_i} est stable par d'. Soit $x \in N_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i}$. Alors

$$(f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m_i} \circ d'(x) = d' \circ (f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m_i}(x) = 0.$$

Donc $d'(x) \in N_{\lambda_i}$. Par construction, $d_{|N_{\lambda_i}} = \lambda_i \operatorname{id}_{N_{\lambda_i}}$, donc d et d' commutent sur chaque N_{λ_i}, donc sur E tout entier.

Or $n = f - d$ et $n' = f - d'$ donc, comme d et d' commutent et f commute avec d et d', alors n et n' commutent également.

Comme d et d' commutent, d'après le théorème 4.1 du chapitre 3 , il existe une base commune de vecteurs propres. En particulier, $d - d'$ est diagonalisable.

Comme les endomorphismes n et n' sont nilpotents et commutent, $n-n'$ est également nilpotent. En effet, si p et q sont des entiers tels que $n^p=0$ et $n'^q=0$, alors $(n-n')^{p+q}=0$ (écrire la formule du binôme de Newton et voir que, dans chaque terme $n^k n'^{p+q-k}$, on a $k \geqslant p$ ou $p+q-k \geqslant q$).

Ainsi $d-d'=n'-n$ est un endomorphisme qui est à la fois diagonalisable et nilpotent. Comme il est nilpotent, d'après le théorème 4.5 , sa seule valeur propre est 0 . Et comme il est diagonalisable, c'est nécessairement l'endomorphisme nul. On a donc $d-d'=n'-n=0$. D'où l'unicité.

□

La version matricielle de la décomposition de Dunford s'énonce comme suit :

Théorème 6.2 (Décomposition de Dunford)**.** *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, il existe une unique matrice N nilpotente et une unique matrice $\varDelta$ diagonalisable telles que*

$$A = N + \varDelta \quad \text{et} \quad N\varDelta = \varDelta N.$$

Remarque 6.3. Attention ! $\varDelta$ est une matrice diagonalisable, pas nécessairement une matrice diagonale. Comme $\varDelta$ est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D=P^{-1}\varDelta P$. Si on note $N'=P^{-1}NP$ alors N' est encore nilpotente et $N'D=DN'$. Une autre façon d'écrire la décomposition de Dunford est alors $P^{-1}AP=D+N'$. C'est dire que A est semblable à la somme d'une matrice diagonale avec d'une matrice nilpotente.

Exemple 6.4 (Piège classique)**.** Attention, une matrice triangulaire peut toujours s'écrire comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente, mais, en général, celles-ci ne commutent pas. Retenez bien ce contre-exemple pour éviter ce piège classique.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut écrire $A=\tilde{D}+\tilde{N}$ avec

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a bien $\tilde{D}$ est diagonale, $\tilde{N}$ est nilpotente car $\tilde{N}^2=0$. Pourtant, ce n'est pas la décomposition de Dunford car les matrices ne commutent pas : $\tilde{D}\tilde{N} \neq \tilde{N}\tilde{D}$. La décomposition de Dunford est tout simplement $D=A$, et $N=O_2$ est la matrice nulle. D est bien diagonalisable (son polynôme caractéristique est scindé à racines simples) mais n'est pas diagonale ; $N=O_2$ est évidemment nilpotente et $DN=ND$.

La méthode pour trouver la décomposition de Dunford d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ consiste à suivre les étapes de la preuve.

(1) On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A : il doit être scindé. On calcule ses racines, qui sont les valeurs propres de A.

(2) Pour chaque valeur propre λ, de multiplicité m comme racine de χ_A, le sous-espace caractéristique $N_\lambda = \operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)^m$ est de dimension m. On détermine

m vecteurs formant une base $\mathscr{B}_\lambda$ de N_λ.
L'union de toutes les bases

$$\mathscr{B} = \cup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathscr{B}_\lambda$$

forme une base de $\mathbb{K}^n$, qu'on note $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$.

(3) On définit l'endomorphisme d par $d(v_i) = \lambda v_i$ pour chaque $v_i \in N_\lambda$. (Dans la base $\mathscr{B}$, la matrice de d est diagonale.).
On note $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. (A est la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}_0$.) Δ sera la matrice de d dans la base $\mathscr{B}_0$, c'est-à-dire que les colonnes de Δ sont les coordonnées des $d(e_i)$ exprimées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

(4) On pose $N = A - \Delta$. Par la démonstration du théorème 6.1 on a Δ est diagonalisable, N est nilpotente et $\Delta N = N\Delta$. La matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ vers la base canonique $\mathscr{B}_0$ transforme Δ en une matrice diagonale $D = P^{-1}\Delta P$.

Exemple 6.5. Calculons la décomposition de Dunford de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Évitez le piège d'écrire :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\widetilde{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\widetilde{N}}$$

$\widetilde{D}$ est diagonale (donc diagonalisable) et $\widetilde{N}$ est nilpotente, mais on peut vérifier que les matrices ne commutent pas : $\widetilde{D}\widetilde{N} \neq \widetilde{N}\widetilde{D}$.

Calculons maintenant la décomposition de Dunford de A.

(1) Le polynôme caractéristique χ_A est égal à

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = -(X-1)^2(X-2).$$

Nous avons donc deux valeurs propres qui sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. La valeur propre 1 est de multiplicité $m_1 = 2$, alors que la valeur propre 2 est de multiplicité $m_2 = 1$.

(2) On note $N_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2$ et $N_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme somme directe

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2 \oplus \operatorname{Ker}(A - 2I_3).$$

Déterminons ces sous-espaces caractéristiques.

- Calcul de $N_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2$. On sait que c'est un espace vectoriel de dimension $m_1 = 2$. On calcule

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $N_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2$ est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $v_1 = (1,0,0)^\top$ et $v_2 = (0,1,0)^\top$. Donc

$$N_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2 = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2.$$

Au passage, notons que la matrice A n'est pas diagonalisable : en effet, la valeur propre 1 est de multiplicité 2 , mais le sous-espace propre E_1 est de dimension seulement 1 (en fait $E_1 = \mathbb{R}v_1$).

- Calcul de $N_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$. On sait que c'est un espace vectoriel de dimension $m_2 = 1$. Après calcul on trouve que sous-espace $N_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_3 = (2,1,1)^\top$, $N_2 = \mathbb{R}v_3$.

- La famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2}_{N_1} \oplus \underbrace{\mathbb{R}v_3}_{N_2}.$$

(3) On définit l'endomorphisme d par :

- $d(v_1) = v_1, d(v_2) = v_2$ (car $v_1, v_2 \in N_1$),
- $d(v_3) = 2v_3$ (car $v_3 \in N_2$).

Dans la base $\mathscr{B}$, la matrice de d est donc la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Or nous voulons la matrice de d dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. (Les calculs vont être assez simples car $e_1 = v_1$ et $e_2 = v_2$.)

- $d(e_1) = d(1,0,0) = (1,0,0) = e_1$.
- $d(e_2) = d(0,1,0) = (0,1,0) = e_2$.

On a $v_3 = (2,1,1) = 2e_1 + e_2 + e_3$ et aussi $e_3 = (0,0,1) = -2v_1 - v_2 + v_3$. Donc

- $d(e_3) = d(-2v_1 - v_2 + v_3) = -2d(v_1) - d(v_2) + d(v_3) = -2v_1 - v_2 + 2v_3 = -2e_1 - e_2 + 2(2e_1 + e_2 + e_3) = 2e_1 + e_2 + 2e_3$.

Donc

$$\Delta = \operatorname{Mat}_B(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) On pose

$$N = A - \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La décomposition de Dunford est $A = \Delta + N$. La preuve du théorème de la décomposition affirme que Δ est diagonalisable, N est nilpotente et $\Delta N = N\Delta$ (c'est un bon exercice de le vérifier à la main).

(6) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}$. On P contient donc, en colonnes les vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ Comme $v_1 = e_1, v_2 = e_2$ et $v_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$, alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si besoin, on peut diagonaliser Δ :

$$D = P^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D et N sont uniques, mais il y a plusieurs choix possibles pour les vecteurs v_i et donc pour la matrice P.

7. Réduction de Jordan

Nous allons montrer que toute matrice, dont le polynôme caractéristique est scindé, est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs "presque" diagonaux. Nous allons ensuite en déduire une autre méthode pour trouver la décomposition de Dunford d'une matrice.

Exemple 7.1. Un **bloc de Jordan** est une matrice de la forme

$$J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $p \geqslant 1$.

C'est donc une matrice triangulaire supérieure, avec des coefficients λ sur la diagonale, des 1 juste au-dessus de la diagonale, puis des 0 encore audessus. On écrit aussi $J_p(\lambda) = \lambda I_p + J_p$ où

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Notons que $J_p = J_p(\lambda) - \lambda I_p$ est nilpotente (de degré de nilpotence p), que λI_p est diagonale, donc diagonalisable et que ces deux matrices commutent. Donc $J_p(\lambda) = \lambda I_p + J_p$ est la décomposition de Dunford du bloc de Jordan $J_p(\lambda)$.

Pour un bloc de Jordan $J_p(\lambda) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, son polynôme caractéristique est $(-1)^p(X-\lambda)^p$ et son polynôme minimal est $(X-\lambda)^p$.

Définition 7.2. Une **matrice de Jordan** est une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

où les $J_{n_i}(\lambda_i)$ sont des blocs de Jordan.

Les blocs de Jordan peuvent être de tailles différentes, et les valeurs $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont quelconques (certaines d'entre elles peuvent être égales). La notation O désigne une matrice nulle (elles peuvent être de tailles différentes).

Exemple 7.3. La matrice de Jordan

$$\begin{pmatrix} J_2(-3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3(-3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_3(5) \end{pmatrix}$$

est égal à

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c|ccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Elle est formée de :
- un bloc de Jordan 2×2 associé à la valeur propre -3 ,
- un bloc de Jordan 3×3 associé à cette même valeur -3 ,
- un bloc de Jordan 1×1 associé à la valeur 2 ,
- un bloc de Jordan 3×3 associé à la valeur 5 .

Nous énonçons le théorème principal de ce paragraphe. Ce théorème sera admis dans sa version générale, mais nous donnerons une démonstration dans le cas ou $n = 2$ et $n = 3$.

Théorème 7.4 (Réduction de Jordan)**.** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$, alors A est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice de Jordan, appelée* **réduite de Jordan** *de A. Autrement dit, il existe donc $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

L'énoncé pour un endomorphisme se reformule comme suit.

Théorème 7.5 (Réduction de Jordan)**.** *Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E, appelée* **base de Jordan***, où la matrice de f est de Jordan, c'est-à-dire,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

Lemme 7.6. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Soient* $v \in \mathbb{K}^n$ *et* $r \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $A^r v = 0$ *et* $A^{r-1}v \neq 0$. *Alors la famille* $\left(v, Av, \ldots, A^{r-1}v\right)$ *est libre.*

Démonstration. La propriété $A^r v = 0$ et $A^{r-1}v \neq 0$ signifie $v \in \operatorname{Ker}(A^r)$ mais $v \notin \operatorname{Ker}\left(A^{k-1}\right)$.

Soient $\beta_0, \ldots, \beta_{r-1}$ des scalaires tels que

$$\beta_0 v + \beta_1 Av + \cdots \beta_{r-1}A^{r-1}v = 0$$

Supposons qu'un des β_i soit non nul et soit r_0 le plus petit élément de $\{0, \ldots, r-1\}$ tel que $\beta_{r_0} \neq 0$. On a donc

$$\beta_{r_0}A^{r_0}v + \cdots \beta_{r-1}A^{r-1}v = 0$$

On multiple par A^{r-1-r_0} (ici $r-1-r_0 \geqslant 0$) et on obtient

$$\beta_{r_0}A^{r-1}v + \cdots \beta_{r-1}A^{2r-2-r_0}v = 0$$

Or, si $i > r_0$ alors $i + r - 1 - r_0 \geq r$ donc $A^{i+r-1-r_0}v = 0$, ainsi de l'égalité précédente on a $\beta_{r_0}A^{r-1}v = 0$ donc $\beta_{r_0} = 0$ ce qui est absurde. Donc tous les β_i sont nuls.

□

Théorème 7.7 (Réduction de Jordan, cas $n = 2$). *Soit* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ *avec* χ_A *scindé. Si* A *n'est pas diagonalisable alors* A *est semblable à*

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où λ *est l'unique valeur propre de* A.

Démonstration. Démonstration. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On suppose f non diagonalisable. Ainsi, les deux valeurs propres ne sont pas distinctes et donc f possède bien une unique valeur propre.

Soit v_2 un vecteur non nul dans $\mathbb{K}^2 = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^2$ (on a bien égalité par Cayley-Hamilton) qui ne soit pas un vecteur propre $\big(v_2 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^2 \backslash \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})\big)$ et posons $v_1 := (f - \lambda \mathrm{Id})v_2$. Alors $(f - \lambda \mathrm{Id})v_1 = (f - \lambda \mathrm{Id})^2 v_2 = 0$ donc v_1 est un vecteur propre.

Par le Lemme 7.6, on sait que (v_1, v_2) est libre donc une base de $\mathbb{K}^2$. Puisque $f(v_2) = \lambda v_2 + v_1$ et que $f(v_1) = \lambda v_1$, la matrice de f dans la base (v_1, v_2) est bien celle annoncée. □

Lemme 7.8. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *on a Ker* $A^i \subseteq \operatorname{Ker} A^{i+1}$, *et s'il y a égalité alors il y a également égalité au rang d'après, i.e. Ker* $A^{i+1} =$ *Ker* A^{i+2}. *Autrement dit, la suite des noyaux emboités est stationnaire.*

Démonstration. Démonstration. On sait bien que la suite des noyaux est croissante $\operatorname{Ker} A^i \subseteq \operatorname{Ker} A^{i+1}$ Supposons maintenant que $\operatorname{Ker} A^i = \operatorname{Ker} A^{i+1}$. On a déjà $\operatorname{Ker} A^{i+1} \subseteq \operatorname{Ker} A^{i+2}$, et si $v \in \operatorname{Ker} A^{i+2}$ alors $Av \in \operatorname{Ker} A^{i+1} = \operatorname{Ker} A^i$ donc $A^i(Av) = 0$ c'est-à-dire $v \in \operatorname{Ker} A^{i+1}$. □

Théorème 7.9 (Réduction de Jordan, cas $n = 3$). *Soit* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ *avec* χ_A *scindé. On suppose que* A *n'est pas diagonalisable.*

(1) *Si A possède exactement deux valeurs propres distinctes λ et μ avec $\chi_A = -(X-\lambda)^2(X-\mu)$ alors A est semblable à*

$$\operatorname{diag}(J_2(\lambda), J_1(\mu)) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

((2)) Si A possède seulement une valeur propre λ, c-à-d. $\chi_A(X) = -(X-\lambda)^3$. On a alors deux cas,

(*i*) *si* $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_3) = 2$ *alors A est semblable à*

$$\operatorname{diag}(J_2(\lambda), J_1(\lambda)) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(*ii*) *sinon* $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_3) = 1$ *et A est semblable à*

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Démonstration. Si A possède trois valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

Si A possède exactement deux valeurs propres distinctes, on applique le lemme de décomposition en sous-espaces caractéristiques et le théorème précédent.

On suppose maintenant que A possède une unique valeur propre λ et soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Par Cayley-Hamilton, l'endomorphisme $u - \lambda$ est nilpotent.

- On suppose que $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) = 2$. Par la Remarque 7.10 on a dim $\operatorname{Ker}(f \lambda \mathrm{Id})^2 = 3$ donc $(f - \lambda \mathrm{Id})^2 = 0$. Soit $e_2 \notin \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$ et posons $e_1 := (f - \lambda \mathrm{Id}) e_2 \neq 0$. Alors $e_1 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$, et soit $e_3 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$ tel que (e_1, e_3) soit une base de $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$. La famille (e_1, e_2, e_3) est libre puisque $e_2 \notin \operatorname{Vect}(e_1, e_3) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$, donc c'est une base de $\mathbb{K}^3$ et on conclut car la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est celle annoncée.

- On suppose $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) = 1$. Montrons que $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^2 = 2$. Pour cela, on considère l'application $g : \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^2 \to \operatorname{Ker}(f - \lambda)\mathrm{Id}$ donnée par $g(v) = (f - \lambda \mathrm{Id})(v)$. Alors $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \cap \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^2 = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$ donc par le théorème du rang on obtient $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^2 - \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \leq \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$ donc $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^2 \leq 2$, d'où finalement $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^2 = 2$ par le Lemme 7.8.

Soit maintenant $e_3 \notin \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^2$. Puisque $(f - \lambda \mathrm{Id})^3 = 0$ (par Cayley-Hamilton), par le Lemme 7.6 on sait que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{K}^3$ où $e_2 := (f - \lambda \mathrm{Id})(e_3)$ et $e_1 := (f - \lambda \mathrm{Id})^2 (e_3) = (f - \lambda \mathrm{Id})(e_2)$. La matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est alors de la forme annoncée.

□

Remarque 7.10. Voici des remarques importantes :

- Les λ qui apparaissent dans les blocs de Jordan sont les valeurs propres de A (ou de f) et donc les racines du polynôme caractéristique.

- Une même valeur λ peut apparaître dans plusieurs blocs différents.

- La réduction de Jordan est unique dans le sens où le nombre et la taille des blocs de Jordan ne dépendent que de A (ou de f). Par contre, on s'autorise à permuter les blocs de Jordan entre eux.

- Le nombre de blocs associés à une valeur propre λ est égal à la dimension de son sous-espace propre E_λ.

- La somme des tailles des blocs de Jordan associés à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.

- La taille du plus grand bloc de Jordan associé à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal.

Remarque 7.11 (calcul pratique de la réduite de Jordan)**.** Voici une méthode basique pour trouver la réduite de Jordan d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, ainsi qu'une matrice de passage : (a) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

(b) Pour chaque valeur propre λ, calculer le sous-espace propre $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ et trouver une base de $E_\lambda(A)$. Le nombre de blocs de Jordan associés à λ est $\dim E_\lambda(A)$.

(c) Pour chaque vecteur propre de la base de $E_\lambda(A)$, on construit le bloc de Jordan associé :

- Si $v_1 \in E_\lambda(A)$ est un vecteur propre de la base de $E_\lambda(A)$, alors on cherche $v_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)\, v_2 = v_1$.

- Puis on cherche s'il existe $v_3 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)\, v_3 = v_2$.

- On arrête le processus lorsqu'il n'y pas de solution.

- On a $Av_1 = \lambda v_1$, puis $Av_2 = v_1 + \lambda v_2, \ldots, Av_p = v_{p-1} + \lambda v_p$.

- Donc, dans le sous-espace engendré par $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, la matrice associée à A, dans cette base, est exactement le bloc de Jordan :

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- On peut aussi savoir quand s'arrêter en utilisant le fait que le bloc de Jordan est toujours d'une taille p inférieure ou égale à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique (et même du polynôme minimal).

(d) On recommence avec v_1', un autre vecteur de la base de E_λ : on construit $v_2', v_3', \ldots$ ce qui conduit à un autre bloc de Jordan pour la valeur λ.

On procède ainsi de suite pour tous les vecteurs de la base de E_λ et ensuite bien sûr pour les autres valeurs propres.

Exemple 7.12. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons sa réduite de Jordan J et une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = J$.

(1) On commence par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 4-X & 3 & -2 \\ -3 & -1-X & 3 \\ 2 & 3 & -X \end{vmatrix} = -(X+1)(X-2)^2$$

Il y a donc deux valeurs propres : -1 et 2.

(2) Valeur propre -1.

La valeur propre -1 est de multiplicité 1 . Le sous-espace propre associé $E_{-1} = \operatorname{Ker}(A + I_3) = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -v\right\}$ sera de dimension 1 . Après calculs, on trouve que $E_{-1} = \mathbb{R}v_1$ où $v_1 = (-1, 1, -1)$. Comme la multiplicité de -1 comme racine de $\chi_A(X)$ est 1 , alors la valeur propre -1 sera juste associée à un bloc de Jordan de taille 1×1.

(3) Valeur propre 2.

La valeur propre 2 est de multiplicité 2 . Il faut déterminer le sous-espace propre associé $E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\right\}$. Après calculs, on trouve que $E_2 = \mathbb{R}v_2$ où $v_2 = (1, 0, 1)$. Comme E_2 est un espace vectoriel de dimension 1, alors que 2 est racine de multiplicité 2 , la matrice A n'est pas diagonalisable et on sait alors que la valeur propre 2 sera associée à un bloc de Jordan de taille 2×2.

(4) Bloc de Jordan.

On cherche $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(A - 2I_3)v_3 = v_2$. Si $v_3 = (x, y, z)$ alors :

$$(A - 2I_3)v_3 = v_2 \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ -3x - 3y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = 1 + 2z \\ x + y = z \end{cases} \iff\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + z \\ y = 1 \end{cases}$$

En prenant par exemple $z = 0$ (n'importe quelle valeur conviendrait), on choisit $v_3 = (-1, 1, 0)$.

(5) Matrice de Jordan.

Dans la base (v_1, v_2, v_3), on a $Av_1 = -v_1, Av_2 = 2v_2$, et comme $(A - 2I_3)v_3 = v_2$ alors $Av_3 = v_2 + 2v_3$. La matrice associée à A dans la base (v_1, v_2, v_3) est donc :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $J = P^{-1}AP$ où P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, v_3 exprimés dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et on a} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 7.13. Soit

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons sa réduite de Jordan J.

(1) Le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_A(X)=\det(A-XI_5)=\cdots=-(X-3)^5.$$

Il y a donc une seule valeur propre : $\lambda=3$.

(2) Valeur propre 3 .

La valeur propre 3 est de multiplicité 5 . Il faut ensuite calculer le sousespace propre associé : $E_3=\operatorname{Ker}(A-3I_5)=\left\{v\in\mathbb{R}^5 \mid Av=3v\right\}$. On calcule $A-3I_5$, et on trouve une base (v_1,v_3) de E_3 :

$$v_1=(0,1,0,0,0)^\top \quad \text{et} \quad v_3=(1,0,0,1,0)^\top$$

Ainsi $\dim E_3=2$ alors que la multiplicité de λ est 5 . La matrice A n'est pas diagonalisable. Il y aura donc deux blocs de Jordan associés à la valeur propre 3. (Cela peut être un de taille 1×1 avec un de taille 4×4, ou bien 2×2 avec 3×3.)

(3) Matrice de Jordan.

- On cherche si on peut trouver $v_2\in\mathbb{R}^5$ tel que $(A-3I_5)\,v_2=v_1$. Une solution possible est $v_2=(-2,0,1,0,0)$. Le processus s'arrête là, car il n'y a aucune solution v au système $(A-3I_5)\,v=v_2$. (En effet, la troisième ligne de $A-3I_5$ est nulle, alors que la troisième coordonnée de v_2 ne l'est pas.) On obtient donc un bloc de Jordan 2×2.

- On fait le même travail pour l'autre bloc de Jordan, en partant du vecteur $v_3=(1,0,0,1,0)\in E_3$. On cherche maintenant $v_4\in\mathbb{R}^5$ tel que $(A-3I_5)\,v_4=v_3$. Après calculs, on trouve $v_4=(2,0,0,0,1)$. On cherche v_5 tel que $(A-3I_5)\,v_5=v_4$. On trouve $v_5=(-3,0,2,0,0)$. Le processus s'arrête là, ce qui correspond à un bloc de Jordan de taille 3×3.

On a $Av_1=3v_1, Av_2=v_1+3v_2, Av_3=3v_3, Av_4=v_3+3v_4, Av_5=v_4+3v_5$. Dans la base (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5), la matrice associée à A est :

$$J=\left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Ainsi $J=P^{-1}AP$, où la matrice P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1,\ldots,v_5$ exprimés dans la base canonique.

8. Applications de la trigonalisation

8.1. **Suites récurrentes linéaires à coefficients constants.** Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et $(a_0,\ldots,a_{p-1})\in\mathbb{K}^p$. On considère la suite récurrente linéaire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients constants définie par

$$\begin{cases} (u_0, \dots, u_{p-1}) \in \mathbb{K}^p \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + \ldots + a_{p-1} u_{n+p-1} \end{cases}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

(c'est une matrice compagnon) et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = AX_n$$

Le calcul de u_n se ramène donc à celui des puissances de A. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^p (\lambda^p - a_{p-1}\lambda^{p-1} - \cdots - a_0)$$

Ce déterminant (déterminant d'une matrice compagnon a été calculer dans la démonstration du Théorème 5.24, Chapitre 2) Il suffit de faire un travail sur les colonne : $C_1 \leftarrow \lambda C_2 + \lambda^2 C_3 + \cdots + \lambda^{p-1} C_p$ puis de developper par rapport à la première colonne.

Exemple 8.1. Calculons u_n pour tout n de $\mathbb{N}$ sachant

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}.$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}, \ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Donc $X_{n+1} = AX_n$. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 45 & -39 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 39\lambda + 45 = -(\lambda-3)^2(\lambda-5)$$

Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses valeurs propres sont 3 (double) et 5 (simple). Les sous-espaces propres sont

$$A_3(A) = \mathrm{Vect}((1,3,9)^\top),$$
$$A_5(A) = \mathrm{Vect}((1,5,25)^\top),$$

Puisque 3 est valeur propre double et que $E_3(A) \dim E_3(A) = 1$, A n'est pas diagonalisable.

On va trigonaliser A. Cherchons $v_2 = (x,y,z)^\top$ pour que $Av_2 = 3v_2 + v_1$.

On a $\quad Av_2 = 3v_2 + v_1 \iff \begin{cases} y = 3x+1 \\ z = 9x+6 \end{cases}.$

On peut donc choisir $c_2 = (0,1,6)^\top$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, on a donc $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 \\ -30 & 16 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PTP^{-1}$.

Une récurrence immédiate montre : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$ D'où, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\quad X_n = PT^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -4n3^{n-1} + 5^n \\ -4(n+1)3^n + 5^{n+1} \\ -4(n+2)3^{n+1} + 5^{n+2} \end{pmatrix}$.

Finalement $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = -4n3^{n-1} + 5^n$.

8.2. **Puissances de matrices scindées, application de la décomposition de Dunford.** La décomposition de Dunford est utile pour calculer les puissances d'une matrice. Nous verrons d'autres applications dans le chapitre 5 sur les systèmes différentiels. Voyons les étapes pour calculer A^p, où $A \in M_n(\mathbb{K})$:

1. Écrire la décomposition de Dunford $A = \Delta + N$.
2. Diagonaliser Δ : $D = P^{-1}\Delta P$ avec D matrice diagonale. Comme D est une matrice diagonale, on calcule facilement D^k, pour tout $k \geqslant 0$.
3. On note $N' = P^{-1}NP$. La matrice N' est encore une matrice nilpotente. On calcule les puissances successives $N'^2, N'^3, \ldots$ sachant qu'à partir d'un certain rang tous les N'^k sont nuls.
4. Comme D et N' commutent (car Δ et N commutent), alors on applique la formule du binôme de Newton :

$$(D + N')^p = \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} D^{p-k} N'^k.$$

On a vu qu'à partir d'un certain rang les matrices N'^k sont toutes nulles. La somme a donc peu de termes non nuls.

5. On a $A = \Delta + N = PDP^{-1} + PN'P^{-1} = P\left(D + N'\right)P^{-1}$. Donc $A^P = \left(P\left(D + N'\right)P^{-1}\right)^p = P\left(D + N'\right)^p P^{-1}$

Exemple 8.2. Calculons les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. On trouve $\chi_A(X) = -(X+1)(X-2)^2$. La valeur propre -1 est de multiplicité 1 , et la valeur propre 2 est de multiplicité 2 .

2. - On calcule $N_{-1} = \operatorname{Ker}\left(A + I_3\right) = \mathbb{R}v_1$ où $v_1 = (0,1,1)$ (c'est bien un espace vectoriel de dimension $m_{-1} = 1$).

- Calcul de $N_2 = \operatorname{Ker}\left(A - 2I_3\right)^2$ qui va être de dimension $m_2 = 2$:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(A - 2I_3\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pour une base de N_2, on choisit d'abord $v_2 \in E_2 = \operatorname{Ker}\left(A - 2I_3\right) \subset N_2$, par exemple $v_2 = (1,1,1)$. On cherche $v_3 \in N_2$, linéairement indépendant de v_2. Par exemple, $v_3 = (1,0,1)$.

- La famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathbb{R}v_1}_{N_{-1}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}v_2 \oplus \mathbb{R}v_3}_{N_2}$$

3. On note $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage P de la base $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}$ s'obtient en écrivant les vecteurs v_i en colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On définit l'endomorphisme d par $d\left(v_1\right) = -v_1$ ($\operatorname{car} v_1 \in N_{-1}$), et $d\left(v_2\right) = 2v_2, d\left(v_3\right) = 2v_3 \left(\operatorname{car} v_2, v_3 \in N_2\right)$. Dans la base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$, la matrice de d est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de d dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ est obtenue en exprimant $d\left(e_i\right)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) ou, ce qui revient au même, par

$$\Delta = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. On pose

$$N = A - \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La décomposition de Dunford est $A = \Delta + N$. On a bien Δ diagonalisable car $D = P^{-1}\Delta P$. Pour vous rassurer, vérifiez que $N^2 = 0$ et que $\Delta N = N\Delta$.

6. Et donc, pour tout $k \geqslant 0$:

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Pour la partie nilpotente, on pose

$$N' = P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } N'^2 = 0$$

7. La formule du binôme de Newton se réduit donc à seulement deux termes :

$$\left(D + N'\right)^p = D^p + \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} D^{p-1}N' + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} D^{p-2}N'^2 + \cdots = D^p + pD^{p-1}N'$$

Donc

$$\left(D + N'\right)^p = \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{p-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & -p2^{p-1} \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $p \geqslant 0$:

$$A^p = P\left(D + N'\right)^p P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^p & p2^{p-1} & -p2^{p-1} \\ 2^p - (-1)^p & p2^{p-1} + 2^p & -p2^{p-1} - 2^p + (-1)^p \\ 2^p - (-1)^p & p2^{p-1} & -p2^{p-1} + (-1)^p \end{pmatrix}$$

URL: `http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Alg-Lin2/`