CHAPITRE 3
RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES

Table des matières

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On notera $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E.

Enfin, si f est un endomorphisme de E, le spectre $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\} \subset \mathbb{K}$ de f est l'ensemble des valeurs propres distinctes de f (quand il est non vide), χ_f son polynôme caractéristique et π_f son polynôme minimal.

On sait que

$$\bigoplus_{k=1}^{p} \mathbf{Ker}\,(f - \lambda_k \mathrm{Id}) \subset E$$

et dans ce chapitre on s'intéresse au cas d'égalité.

1. Endomorphismes diagonalisables

Définition 1.1. *On dit qu'un endomorphisme f de E est* **diagonalisable** *s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.*

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, si et seulement s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ telle que A soit semblable à D. Autrement dit,

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \mid A = PDP^{-1}.$$

Date: 4 octobre 2023 • Khalid Koufany.

Remarque 1.2. (1) Une base dans laquelle la matrice de f est diagonale s'appelle une base de diagonalisation de f.

(2) Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si, et seulement si, sa matrice A dans une base donnée $\mathcal{B}_0$ est diagonalisable. En effet,
- Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice D de f dans $\mathcal{B}$ soit diagonale et, en notant $P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$, on a alors $A = PDP^{-1}$ (formule de changement de base).
- Si A est diagonalisable, il existe P inversible et D diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$ et donc D est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de E définie par $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = P$.

(3) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, on appelle diagonalisation de A la donnée de P, D et P^{-1} telles que $A = PDP^{-1}$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable, diagonaliser A c'est déterminer P, D et P^{-1} telles que $A = PDP^{-1}$.

Sauf exception, il n'y a pas unicité d'une diagonalisation d'une matrice diagonalisable ; plus précisément, P n'est pas unique et D est unique à permutation près de ses éléments diagonaux.

Au lieu de diagonalisation, on dit aussi *réduction à la forme diagonale.*

Théorème 1.3. *Si f est un endomorphisme de E, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *f est diagonalisable ;*

(2) *Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f ;*

(3) *E est la somme des sous-espaces propres de f,*

$$E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$$

(4) *La dimension de E est égale la somme des dimensions des sous-espaces propres de f,*

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f).$$

Démonstration. Notons d'abord que (3) est équivalent à (3)' : E est la somme directe des sous-espaces propres de f,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$$

car toute somme de sous-espaces propres est une somme directe (d'après Théorème 4.11, Chapitre 2).

(1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons f diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale ; il existe donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel

que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Comme

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \begin{cases} f(e_i) = \lambda_i e_i \\ e_i \neq 0 \end{cases},$$

la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres pour f.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres pour f. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(e_i) = \lambda_i e_i$. Il est clair que chaque λ_i est une valeur de f (un vecteur propre associé est e_i). Notons $\Lambda = \{\lambda_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}) \supset \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K} e_i = E$$

donc la somme des sous-espaces propres $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$ est est égale à E.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Supposons que la somme des sous-espaces propres pour f soit égale à E. Comme cette somme est directe, on a alors

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} E_\lambda(f)\right) = \dim(E).$$

(4) $\Rightarrow$ (1) : Supposons que la somme des dimensions des sous-espaces propres pour f soit égale à $\dim(E)$. Notons $k = \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f))$ et $\mu_1, \dots, \mu_k$ les éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$ (les valeurs propres de f deux à deux distinctes).
Chaque sous-espace propre $E_{\mu_j}(f)$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ admet au moins une base $\mathcal{B}_j$; notons $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$. Comme les $E_{\mu_j}(f)$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ sont en somme directe et que chaque $\mathcal{B}_j$ est libre dans E, $\mathcal{B}$ est une famille libre E. D'autre part,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Card}(\mathcal{B}_j) = \sum_{j=1}^{k} \dim\left(E_{\mu_j}(f)\right) = \dim(E)$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E, et la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale, puisque les éléments de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres f,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 I_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_k I_{d_k} \end{pmatrix}$$

où $d_j = \dim \mathcal{B}_j$.

□

Exemple 1.4. Soit la la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Valeurs propres :

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 5-\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 5-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\
&= (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont : -1 de multiplicité 2 et 5 de multiplicité 1 et $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 5\}$.

(2) Sous-espaces propres :

– Le sous-espace propre $E_{-1}(A)$ associé à la valeur propre -1 a pour équations

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Le système équivaut à l'équation $x + y + z = 0$. Le sous-espace $E_{-1}(A)$ est donc un plan. Une base de $E_{-1}(A)$ est formée des deux vecteurs $(1, -1, 0)^\top$ et $(1, 0, -1)^\top$.

– Le sous-espace propre $E_5(A)$ associé à la valeur propre 5 a pour équations

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

On montre (avec la méthode du Guass) que ce système est équivalent au système
$$\begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}.$$
Par conséquent le sous-espace $E_5(A)$ est la droite engendrée par le vecteur $(1,1,1)^\top$.

(3) Diagonalisabilité :

Puisque $\dim E_{-1}(A) + \dim E_5(A) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, la matrice A est diagonalisable et elle est semblable à la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(-1,-1,5)$.

(4) Diagonalisation :

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et nous obtenons $P = ADP^{-1}$ à savoir
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Conditions CNS et CS de diagonalisabilité

Théorème 2.1 (CNS de diagonalisabilité)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si*

(*a*) *χ_f est scindé dans $\mathbb{K}$,*

(*b*) *pour tout valeurs propre λ de f, $\dim E_\lambda(f)$ est égal à l'ordre de multiplicité de λ.*

Démonstration. (1) Pour chaque valeurs propre λ de f, notons $d(\lambda) = \dim E_\lambda(f)$ et $m(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ dans χ_f, autrement dit
$$\chi_f(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (\lambda - X)^{m(\lambda)}.$$

- Supposons f diagonalisable. Alors d'après Theoréme 1.3, on a
$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} d(\lambda). \tag{1}$$

D'autre part, puisque f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On a donc,

$$\chi_f(X) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) - XI_n\right) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (\lambda - X)^{m(\lambda)}.$$

Ainsi, χ_f est scindé et

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} m(\lambda) = n. \tag{2}$$

Sachant que $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ (voir Proposition 5.16, Chapitre 2) les égalité (1) et (2), montrent que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$, $d(\lambda) = m(\lambda)$.

Réciproquement, supposons χ_f scindé et que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f), d(\lambda) = m(\lambda)$. Puisque χ_f est scindé et que les zéros de χ_f sont les valeurs propres de f, on a $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} m(\lambda) = n$. D'où $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} d(\lambda) = n$, et donc d'après Théorème 1.3, f est diagonalisable.

$\square$

Corollaire 2.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si*

(a) χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$,

(b) pour tout valeurs propre λ de f, $\dim E_\lambda(A)$ est égal à l'ordre de multiplicité de λ.

Exemple 2.3. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Valeurs propres :

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 2-\lambda & -3 & -\lambda \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2)$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(12 - (2+\lambda)(5-\lambda)) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

Donc χ_A est scindé et $\mathrm{Sp}A) = \{1, 2\}$.

(2) Sous-espaces propres :

– Le sous-espace propre $E_1(A) = \mathbf{Ker}(A - I_3)$ est nécessairement de dimension 1 (car $1 \leq d(1) \leq m(1) = 1$).

– Le sous-espace propre $E_2(A) = \mathbf{Ker}(A - 2I_3)$ a pour équations

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ \ \ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ces trois équations se ramènent à $2x - 3y - 2z = 0$, qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$. Donc $\dim E_2(A) = 2$.

(3) Diagonalisabilité :

χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. La dimension de $E_1(A)$ est égale à la multiplicité de la valeur propre 1 et la dimension de $E_2(A)$ est égale à la multiplicité de la valeur propre 2. La matrice A est donc diagonalisable.

Exemple 2.4. Une matrice peut être diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$. Prenons par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Comme ce polynôme n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$) la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Cependant sur $\mathbb{C}$, on a $\chi_A(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i)$. Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$.

– Le sous-espace propre associé à i a pour équations :

$$\begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{cases}.$$

Le système est équivalent à $y = ix$. Donc $E_i(A)$ est la droite engendrée par le vecteur $(1, i)^\top$ (vecteur propre pour la valeur propre i).

– Le sous-espace propre associé à $-i$ a pour équations :

$$\begin{cases} ix + y = 0 \\ -x + iy = 0 \end{cases}.$$

Le système est équivalent à $y = -\imath x$. Donc $E_{-i}(A)$ est la droite engendré par Le vecteur $(i, 1)^\top$ (vecteur propre pour la valeur propre $-i$).

Finalement, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$. La dimension de $E_i(A)$ est égale à la multiplicité de la valeur propre i et la dimension de $E_{-i}(A)$ est égale à la multiplicité de la valeur propre $-i$. La matrice A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Elle est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Nous obtenons, $A = PDP^{-1}$, à savoir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 2.5 (CS de diagonalisabilité)**.** (1) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes (où $n = \dim E$), alors f est diagonalisable.*

(2) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.*

Remarque 2.6. Si f est scindé simple, alors f est diagonalisable et possède n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ telles que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \dim E_{\lambda_k}(f) = 1.$$

Exemple 2.7. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristiques est

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4) \end{aligned}$$

On a alors $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, -4\}$. Comme A est une matrice 3×3 et admet 3 valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et elle est semblable à la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(1, 2, -4)$.

Réduisons la sous forme diagonale. On sait par avance que chaque sous-espace propre est dimension 1.

Après calcul on trouve

$$E_1 = \mathrm{Vec}(u), \ E_2 = \mathrm{Vec}(v), \ E_{-4} = \mathrm{Vec}(w)$$

où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, une base de diagonalisation est $\mathcal{B} = (u, v, w)$. La matrice de passage (de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors $A = PDP^{-1}$, à savoir

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/6 & -1/5 & 1/30 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.8. Considérons l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$f : P \mapsto \left(1 - X^2\right) P' + nXP$$

La famille $\mathcal{B}_0 = (1, X, \ldots, X^n)$ est une base de E et pour tout k de $[0, n]$ on a

$$f\left(X^k\right) = (n - k)X^{k+1} + kX^{k-1}$$

Donc la matrice de f dans $\mathcal{B}_0$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ n & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & n \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réduire l'endomorphisme f revient à réduire la matrice A.

Au lieu de calculer son polynôme caractéristique (ce qui peut être pas facile à calculer, il s'agit d'un déterminant trigonale), on va déterminer directement, en résolvant une équation différentielle, les valeurs propres et vecteurs propres.

Un polynôme P non nul de E est un vecteur propre de f s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left(1 - X^2\right) P' + nXP = \lambda P$$

P est donc une solution polynomiale non nulle de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'(x) + nxy(x) = \lambda y(x)$$

où encore pour $x \neq \pm 1$ et $y(x) \neq 0$,

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{nx - \lambda}{x^2 - 1} = \frac{n - \lambda}{2(x - 1)} + \frac{n + \lambda}{2(x + 1)}$$

donc

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int \frac{n-\lambda}{2(x-1)} + \frac{n+\lambda}{2(x+1)}dx$$

et

$$\begin{aligned}\ln|y(x)| &= \frac{n-\lambda}{2}\ln|x-1| + \frac{n+\lambda}{2}\ln|x+1| + C\\ &= \ln|x-1|^{\frac{n-\lambda}{2}}|x+1|^{\frac{n+\lambda}{2}} + C\end{aligned}$$

d'où

$$y(x) = K(x-1)^{\frac{n-\lambda}{2}}(x+1)^{\frac{n+\lambda}{2}}.$$

Remarquons que $\frac{n-\lambda}{2} + \frac{n+\lambda}{2} = n$. Donc pour que cette solution soit une fonction polynomiale de degré $\leq n$, il est nécessaire que

$$\frac{n-\lambda}{2} = k \in [\![0,n]\!]$$

et dans ce cas $\frac{n+\lambda}{2} = n-k$, d'où

$$\lambda_k = n-2k,\ k \in [\![0,n]\!].$$

Réciproquement, pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, si

$$\lambda_k = n-2k \ \text{ et } \ P_k(X) = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$$

alors

$$f(P_k) = (n-2k)P_k.$$

Donc, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, λ_k est une valeur propre de f et P_k est un vecteur propre associé.

On a ainsi trouvé $n+1$ valeurs propres de f. Ce sont les seules, car il ne doit pas en avoir plus que $n+1$ (la dimension de E étant égal à $n+1$).

On en déduit que f est diagonalisable et

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \dim E_{\lambda_k}(f) = 1$$

ce qui montre que

$$E_{\lambda_k}(f) = \mathrm{Vect}(P_k).$$

La famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de f (base de diagonalisation) et la matrice de f dans cette base est $\mathrm{diag}(n, n-2, n-4, \ldots, -n+2, -n)$.

3. Endomorphismes diagonalisables et polynômes annulateurs

Lemme 3.1. (1) *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulatcur de f. On a alors* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$.

(2) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et P un polynôme annulateur de A. On a alors* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$.

Autrement dit, toute valeur propre de f (resp. A) est zéro de tout polynôme annulateur de f (resp. A).

Démonstration. (1) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$; on a,

$$\mathbf{0} = (P(f))(x) = P(\lambda)x$$

donc $P(\lambda) = 0$, puisque $x \neq \mathbf{0}$.

(2) Sé démontre de la même façon. □

Théorème 3.2. *Un endomorphisme f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, il annule un polynôme scindé simple. Autrement dit, s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$ tel que $P(f) = 0$.*

Démonstration. Supposons que f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ et soit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ le spectre de f. Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$ soit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{d_r} \end{pmatrix}$$

où $\forall j \in [\![1, r]\!]$, $d_j = \dim E_{\lambda_j}(f)$. Posons

$$P(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j).$$

On a

$$\begin{aligned} P(A) &= \prod_{j=1}^{r} (A - \lambda_j I_n) \\ &= \mathrm{diag}(0_{d_1}, (\lambda_2 - \lambda_1) I_{d_2}, \dots, (\lambda_r - \lambda_1) I_{d_r}) \times \cdots \times \\ &\times \cdots \times \mathrm{diag}((\lambda_1 - \lambda_r) I_{d_1}, (\lambda_2 - \lambda_r) I_{d_2}, \dots, 0_{d_r}) \\ &= 0_n \end{aligned}$$

Ainsi P est un polynôme annulateur de f et il est scindé simple.

Inversement, supposons f annulé par un polynôme scindé simple

$$P(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \alpha_j)$$

où $\forall j \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$. Comme les racines α_j sont deux à deux distinctes, le lemme des noyaux implique

$$E = \oplus_{j=1}^{r} \mathbf{Ker}(f - \alpha_j \mathrm{Id})$$

D'autre part, d'après le lemme 3.1, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ et donc les sous-espaces $\mathbf{Ker}(f - \alpha_j \mathrm{Id})$ sont des sous-espaces propres de f. Comme f induit l'homothelie de rapport α_j sur $\mathbf{Ker}\,(f - \alpha_j\,\mathrm{Id})$ pour tout j, une base de E adaptée à cette somme directe est une base de diagonalisation de f. □

Corollaire 3.3. *Un endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal π_f est scindé dans $\mathbb{K}$ et n'a que des racines simples.*

Exemple 3.4. (1) Soit $A \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 7A - 6I_{10}$.
Le polynôme $X^3 - 7X + 6 = (X-1)(X-2)(X+3)$ de $\mathbb{R}[X]$ est scindé simple, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(2) Soit $n \geqslant 3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$f(e_1) = e_n,\ f(e_2) = e_1,\ \ldots,\ f(e_n) = e_{n-1}$$

d'où $f^n = \mathrm{Id}$ et donc $A^n = I_n$. Ainsi, A annule le polynôme $X^n - 1$, qui est scindé simple dans $\mathbb{C}$ (ses zéros sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1), donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

4. Diagonalisation simultanée

On dit qu'une famille $(f_j)_{j \in I}$ d'endomorphismes de E est **simultanément diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices des f_j sont diagonales. Une telle base s'appelle alors une **base de diagonalisation simultanée**.

Théorème 4.1. *Soit I un ensemble ayant au moins deux éléments. Une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes de E est simultanément diagonalisables si, et seulement si,*

$$\begin{cases} f_i \text{ diagonalisable} & \forall i \in I \\ f_i f_j = f_j f_i & \forall i, j \in I \end{cases}$$

Démonstration. S'il existe une base commune de diagonalisation $\mathcal{B}$ pour la famille d'endomorphisme $(f_i)_{i \in I}$, en utilisant les matrices des f_i dans cette base $\mathcal{B}$, on vérifie facilement que ces endomorphismes commutent deux à deux.

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E.

Pour $n = 1$, le résultat est évident puisque tous les f_i sont des homothéties.

On suppose que E est de dimension $n+1$ et que le résultat est acquis pour les espaces vectoriels de dimension inférieure ou égale à n. Si tous les f_i sont des homothéties alors le résultat est clair. Sinon soit j dans I tel que

f_j ne soit pas une homothétie. On a alors la décomposition en sous espaces propres

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f_j)} \mathbf{Ker}\,(f_j - \lambda \mathrm{Id})\,.$$

L'endomorphisme f_j n'étant pas une homothétie chaque sous espace propre de f_j est de dimension inférieure ou égale à n. Comme tous les f_i commutent à f_j, chaque sous espace propre est stable par f_i pour tout i dans I et la restriction de chaque f_i à chaque $\mathbf{Ker}\,(f_j - \lambda Id)$ est diagonalisable. On peut donc appliquer, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f_j)$, l'hypothèse de récurrence à la famille des restrictions des f_i à $\mathbf{Ker}\,(f_j - \lambda \mathrm{Id})$, ce qui permet de construire une base de diagonalisation de $\mathbf{Ker}\,(f_j - \lambda \mathrm{Id})$ commune à toutes les restrictions de f_i à cet espace. La réunion de ces bases donne alors une base de diagonalisation commune à tous les f_i. □

Exemple 4.2. Considérons les matrices suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifions d'abord que A et B sont diagonalisables.

On peut chercher le polynôme minimal de A en calculant les premières puissances A^k, pour certains entiers $k \geqslant 1$.

On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$$

De là, on obtient que $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A. Puisque $A \neq -I_4$ et que $A \neq 2I_4$, on déduit que $\pi_A(X) = (X+1)(X-2)$.

La matrice A est donc diagonalisable, son polynôme minimal étant scindé simple. Les deux valeurs propres de A sont -1 et 2.

On montre de même que le polynôme minimale de B est $\pi_B(X) = (X-1)(X+2)$. Donc B est diagonalisable et a comme valeurs propres 1 et -2.

Comme $AB = BA$, les deux matrice sont diagonalisables dans la même base (diagonalisation simultanée). Pour construire cette base nous allons suivre les étapes suivantes.

Etape 1. Utilisons le sous-espace propre $E_{-1}(A)$.

Nous allons construire autant de vecteurs propres simultanés (pour A et B) que la dimension de $E_{-1}(A)$. On trouve que $E_{-1}(A) = \mathbf{Ker}(A + I)$ est de dimension 2 et il est engendré par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Construisons deux vecteurs propres de B appartenant à $E_{-1}(A)$. Il s'agit de construire deux combinaisons linéaires des vecteurs v_1 et v_2 pour obtenir deux vecteurs propres de B, en remarquant que ces combinaisons linéaires resteront dans l'espace propre de $E_{-1}(A)$.

On cherche donc une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ ainsi que deux réels a et b non simultanément nuls, tels que $B\,(av_1 + bv_2) = \lambda\,(av_1 + bv_2)$, soit $(B - \lambda I)\,(av_1 + \; bv_2) = 0$ ou encore $a(B - \lambda I)v_1 + b(B - \lambda I)v_2 = 0$.

On a

$$(B - \lambda I)v_1 = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 2+\lambda \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (B - \lambda I)v_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 0 \\ 1-\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Donc $a(B - \lambda I)v_1 + b(B - \lambda I)v_2 = \mathbf{0}$, si et seulement si,

$$\begin{cases} (1-\lambda)(a+b) = 0 \\ \qquad a(2+\lambda) = 0 \\ 3a + (1-\lambda)b = 0. \end{cases}$$

– Si $\lambda = 1$, alors $a = 0$ et on constate que $(B - I)v_2 = 0$.

– Si $\lambda = -2$, alors $a + b = 0$. On peut prendre par exemple $a = -1$ et $b = 1$, donc $(B + 2I)\,(v_2 - v_1) = 0$.

On pose alors

$$w_1 = v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs w_1 et w_2 sont deux vecteurs propres simultanés pour les matrices A et B :

$$\begin{aligned} Aw_1 &= A\,(v_2 - v_1) = Av_2 - Av_1 = -v_2 + v_1 = -w_1 \\ Aw_2 &= Av_2 = -v_2 = -w_2 \\ Bw_1 &= 2w_1 \\ Bw_2 &= w_2 \end{aligned}$$

Etape 2. On procède de la même façon que l'étape 1, en utilisant le sous-espace propre $E_2(A)$.

On trouve que $E_2(A) = \mathbf{Ker}(A-2I)$ est de dimension 2 et il est engendré par les vecteurs

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II reste à former des combinaisons linéaires des vecteurs v_3 et v_4 pour construire deux vecteurs propres de la matrice B.

Soit λ un réel dont la valeur numérique sera choisie un peu plus loin. On a

$$(B-\lambda I)v_3 = \begin{pmatrix} -2-\lambda \\ -2-\lambda \\ -2-\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \; et \; (B-\lambda I)v_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 0 \\ 1-\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$$

On constate que $(B+2I)v_3 = 0$ et que $(B-I)v_4 = 0$. On pose alors

$$w_3 = v_3, , \quad w_4 = v_4$$

les vecteurs w_3 et w_4 sont clairement des vecteurs propres simultanés pour les matrices A et B.

Etape 3. Base de diagonalisation simultanée

La famille $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ est libre, ce qui se fait sans problème, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres à la fois de A et de B. Il s'agit de la base de diagonalisation simultanée de A et B. Posons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$. On a alors la diagonalisation simultanée de A et B à travers P

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Cas des matrices symétriques réelles

On va considérer ici rapidement le cas des matrices réelles symétriques. Cette notion sera traitée en détail au semestre 4 dans le cours d'Algèbre bilinéaire. Ainsi le résultat principal de ce paragraphe sera énoncé comme une simple information, et ne pourra pas être utilisé par les étudiants comme argument de diagonalisabilité.

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** si $A^\top = A$.

Théorème 5.1 (Admis)**.** *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.*

Remarque 5.2. Vous verrez au cours d'Algèbre bilinéaire qu'on peut choisir la matrice P de sorte que $P^{-1} = P^\top$, autrement dit P **orthogonale**.

Exemple 5.3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est réelle symétrique, donc on sait d'après le théorème admis qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Ayant cela en tête nous allons déroulé la vérification.
Valeurs propres : On a

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

et donc les valeurs propres sont 1 et -2.
Sous-espaces propres : On trouve

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \mathrm{Vect}((1,1,1)^\top), \\ E_{-2}(A) &= \mathrm{Vect}((-1,1,0)^\top, (-1,0,1)^\top). \end{aligned}$$

Diagonalisabilité : Comme χ_A est scindé et que pour chaque valeurs propre, la multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre, la matrice A est diagonalisable.
Diagonalisation : On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $A = PDP^{-1}$, à savoir,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

6. Applications

6.1. **Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons A diagonalisable ; il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On montre assez facilement par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$$

En notant

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a clairement

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

D'où la valeur de A^k.

Exemple 6.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Calculons A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Le polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$.

Puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que A admet trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

On calcule les sous-espaces propres. On trouve

$$\begin{aligned} E_{-2}(A) &= \mathrm{Vect}((1,1,1)^\top), \\ E_2(A) &= \mathrm{Vect}((1,2,3)^\top), \\ E_3(A) &= \mathrm{Vect}((2,3,5)^\top). \end{aligned}$$

En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = PDP^{-1}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeurs de $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ est

$$\begin{pmatrix} (-2)^n - 2 \times 2^n + 2 \times 3^n & (-2)^n + 3 \times 2^n - 4 \times 3^n & -(-2^n) - 2^n + 2 \times 3^n \\ (-2)^n - 4 \times 2^n + 3 \times 3^n & (-2)^n + 6 \times 2^n - 6 \times 3^n & -(-2^n) - 2 \times 2^n + 3 \times 3^n \\ (-2)^n - 6 \times 2^n + 5 \times 3^n & (-2)^n + 9 \times 2^n - 10 \times 3^n & -(-2^n) - 3 \times 2^n + 5 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

D'autre part, comme $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, la matrice A est inversible ; ainsi A^{-1} existe.

Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$, alors

$$A^n = (A^{-1})^{-n} = (PD^{-1}P^{-1})^{-n} = P(D^{-1})^{-n}P^{-1} = PD^nP^{-1}$$

On en déduit que l'expression ci-dessus de A^n est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

6.2. **Suites récurrentes linéaires simultanées du 1^{er} ordre à coefficients constants.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. On considère les suites récurrentes linéaires simultanées du 1^{er} ordre à coefficients constants définies par

$$(E) \quad \begin{cases} x_{1,0} = \alpha_1,\ x_{2,0} = \alpha_2, \ldots, x_{n,0} = \alpha_n & \\ x_{i,k+1} = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} x_{j,k} & \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Il s'agit de calculer les $x_{j,k}$. En notant $X_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix}$, le système (E) se ramène à

$$\begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = AX_k \end{cases}$$

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k = A^k X_0$ et la détermination de X_k se ramène au calcul de A^k.

Exemple 6.2. Soient $u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = -1$. Pour tout entier n supérieur à 1 , on définit

$$\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + 3v_{n-1} - 3w_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = -u_{n-1} + v_{n-1} \end{cases}$$

Calculons u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Le système de suites peut se mettre sous la forme matricielle suivante,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$X_n = AX_{n-1} = A^n X_0.$$

Tout revient à calculer A^n.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$. La matrice A est diagonalisable, car c'est une matrices 3×3 qui admet 3 valeurs propres distinctes.

Les sous-espaces propres sont

$$E_{-1} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + (-1)^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & (-1)^{n+1} - 2^n + 2 & (-1)^n + 2^n - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + (-1)^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & (-1)^{n+1} - 2^n + 2 & (-1)^n + 2^n - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot 2^n \\ 4 - 3 \cdot 2^n \\ 4 - 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.3. **Résolution de certaines équations matricielles.** Nous allons traiter cette partie par des examples.

(1) Résolvons l'équation matricielle

$$M^2 = D \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est solution alors $MD = M^3 = DM$. Les solutions sont à rechercher parmi les matrices commutant avec D.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation $MD = DM$ donne

$$\begin{pmatrix} a & 4b \\ c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$$

et donc $b = c = 0$. Ainsi, la matrice M est diagonale.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, l'équation $M^2 = D$ équivaut à $\begin{cases} a^2 = 1 \\ d^2 = 4 \end{cases}$. Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) Résolvons l'équation matricielle

$$M^2 = A \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cherchons si A est diagonalisable. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4).$$

Comme A est une matrice 2×2 et admet deux valeurs propres distinctes elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Nous allons la diagonaliser.
Les sous-espaces propres sont

$$E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; E_4(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Donc

$$M^2 = A \Leftrightarrow M^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}M^2P = D \Leftrightarrow \left(P^{-1}MP\right)^2 = D.$$

On se ramène donc à l'équation matricielle de l'exemple (1). Ainsi, les solutions de l'équation étudiée sont

$$PD_1P^{-1}, PD_2P^{-1}, PD_3P^{-1}, PD_4P^{-1}.$$

(3) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Résolvons l'équation matricielle $M^2 = A$.

A admet trois valeurs propres distinctes à savoir 1 3 et 4. Elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres de A sont des droites. Après diagonalisation on trouve, $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ puis } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$X^2 = \text{A} \Leftrightarrow X^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow (P^{-1}XP)^2 = \text{D} \Leftrightarrow P^{-1}XP = \text{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm 2, \pm 1)$$

D'où les solutions

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -16\sqrt{3}\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3}\varepsilon_1 + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5\left(\sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_3\right]\!\!] /2 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1]^3$.

Ajouter commutant d'une matrice

Diagonalisation par blocs : Munier page 85

URL: `http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Alg-Lin2/`