CHAPITRE 2
POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES, VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

Table des matières

1. Sous-espaces stables et polynômes d'endomorphisme 1
2. Polynôme d'endomorphisme 4
3. Polynômes annulateurs et polynôme minimal 7
4. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme 11
5. Polynôme caractéristique 16

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On notera aussi $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E.

1. Sous-espaces stables et polynômes d'endomorphisme

Dans ce paragraphe on suppose E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Le sous-espace vectoriel F de E est dit* **stable** *par f lorsque $f(F) \subset F$.*

Quand un sous-espace F est stable par f, la restriction $f_{|F}$ de f à F définie par

$$f_{|F}: \begin{cases} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

*est alors un endomorphisme de F. On l'appelle l'***endomorphisme induit** *par f sur F.*

Proposition 1.2. *Soit f et g deux endomorphismes de E qui commutent. Alors les sous-espaces* $\mathbf{Ker}\, f$ *et* $\mathbf{Im}\, f$ *sont stables par g.*

Démonstration. Si $y \in \operatorname{Im} f$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On obtient

$$g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f[g(x)] \in \mathbf{Im}\, f$$

donc $\mathbf{Im}\, f$ est stable par g.

Si $x \in \mathbf{Ker}\, f$ alors $f(x) = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{0} = g[f(x)] = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f[g(x)]$$

donc $g(x) \in \mathbf{Ker}\, f$ et $\mathbf{Ker}\, f$ est stable par g. □

Date: 14 octobre 2023 • Khalid Koufany.

Exemple 1.3. Soient les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$f(x,y,z) = (x,0,0) \text{ et } g(x,y,z) = (0,-y,z)$$

Alors f et g commutent, car $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f \circ g(x,y,z) &= f(g(x,y,z)) = f(0,-y,z) = (0,0,0), \\ g \circ f(x,y,z) &= g(f(x,y,z)) = g(x,0,0) = (0,0,0) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{Ker}\, f &= \mathrm{Vect}((0,1,0),(0,0,1)), \\ \mathbf{Im}\, f &= \mathrm{Vect}((1,0,0)) \end{aligned}$$

Vérifions que $\mathbf{Ker}\, f$ est stage par g. On a

$$\begin{aligned} f(g(0,1,0)) &= f(0,0,0) = (0,0,0), \\ f(g(0,0,1)) &= f(0,0,0) = (0,0,0) \end{aligned}$$

donc $g(0,1,0)$ et $g(0,0,1)$ sont dans $\mathbf{Ker}\, f$ et par suite $g\,(\mathbf{Ker}\, f)) \subset \mathbf{Ker}\, f$.
Vérifions que $\mathbf{Im}\, f$ est stage par g. On a

$$g(1,0,0) = (0,0,0) \in \mathbf{Im}\, f$$

donc $g\,(\mathbf{Im}\, f) \subset \mathbf{Im}\, f$.

Corollaire 1.4. *Soit f un endomorphisme de E. Alors les sous-espaces $\mathbf{Ker}\, f$ et $\mathbf{Im}\, f$ sont stables par f.*

Supposons E de dimension finie n et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Soit $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Le théorème de la base incomplète nous permet de compléter cette base en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une base **adaptée** à F.

Proposition 1.5 (Matrice dans une base adaptée à un sev)**.** *Si E est de dimension finie n alors F est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, la matrice de f dans une base de E adaptée à F, s'écrit*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline O & P \end{array}\right)$$

avec $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $N \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $P \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et O la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, M est la matrice de $f_{|F}$ dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Démonstration. Si F est stable par f et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base adaptée à F ($(e_1, \dots, e_p)$ étant une base de F) alors, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $f\,(e_j) \in F$ par hypothèse, soit $f\,(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_j$ (les $a_{i,j}$ sont nuls pour

$i \geqslant p+1$). Donc,

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & a_{1,p+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & a_{p,p+1} & \dots & a_{p,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{p+1,p+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,p+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

ce qui est bien la forme annoncée.

Réciproquement, on reprend l'écriture de la matrice de f ci-dessus, il est immédiat que $f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$ donc, par linéarité, $f(x) \in F$ pour tout vecteur $x \in F$.

□

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Supposons que E s'écrit $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ comme somme directe de sous-espaces E_i. Soit, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\mathcal{B}_i$ une base de E_i. Alors (concaténation de toutes ces bases) $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est une base de E appelée **base adaptée à la somme directe** $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition 1.6. *Soient $E_1, \dots, E_p$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f stabilise chaque sous-espace E_i si, et seulement si, dans toute base adaptée à la décomposition de E en somme directe, la matrice de f s'écrit*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}.$$

où les A_i sont les matrices de $f_{|E_i}$.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur p en commençant par $p = 2$.

Supposons $E = E_1 \oplus E_2$ et soit $(e_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant k_j}$ une base de E_i pour $i \in [\![1, 2]\!]$.

- Si f stabilise les espaces E_1 et E_2 alors d'après la proposition 1.5 la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Mais comme f stabilise E_2 alors $C = 0$.

- La réciproque est immédiate.

On suppose que la propriété est vraie au rang p alors, au rang $p+1$, en écrivant que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_{p-1} \oplus (E_p \oplus E_{p+1})$ (somme de p sous-espace vectoriels), en appliquant l'hypothèse de récurrence à la somme de ces p sous-espaces vectoriels puis la propriété à l'ordre 2 à $E_p \oplus E_{p+1}$ on obtient bien le résultat.

□

Remarque 1.7. Dans le cas de la proposition ci-dessus, on dit que f admet une matrice diagonale par blocs. Le déterminant de f vaut alors $\det A = \det A_1 \cdots \det A_p$.

Corollaire 1.8. *Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et f un endomorphisme de E. La matrice de f dans la base B est diagonale si, et seulement si, chaque sous-espace $E_i = \operatorname{Vect}(e_i)$ est de dimension 1 et stable par f.*

Dans ce cas l'endomorphisme induit par f sur E_i est une homothétie vectorielle, c-à-d ; il existe un scalaire λ_i tel que $f_{|E_i} = \lambda_i \mathrm{Id}$.

Théorème 1.9. *Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note $F_k = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Un endomorphisme f de E admet dans la base B une matrice triangulaire supérieure si, et seulement si, les sous-espaces F_k sont stables par f.*

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$\{\mathbf{0}\} \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = E.$$

($\Rightarrow$) Par hypothèse on a

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(e_j) = \sum_{k=1}^{j} a_{k,j} e_i$$

par conséquent

$$f(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_j) = F_j$$

. On obtient donc

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \forall j \in [\![1, i]\!], f(e_j) \in F_j \subset F_i$$

soit $f(e_i) \in F_i$.

($\Leftarrow$) On sait ici que $\forall i \in [\![1, n-1]\!], f(e_i) \in F_i$ ce qui se traduit par $f(e_i) = \sum_{k=1}^{i} a_{k,i} e_k$ donc la matrice de f est bien triangulaire supérieure. □

2. Polynôme d'endomorphisme

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Rappelons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit f^k par la relation de récurrence $f^k = f^{k-1} \circ k$. Par convention on a $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

Définition 2.1. *Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on appelle valeur de P en f, et on note $P(f)$, l'endomorphisme*

$$P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_p f^p,$$

Remarquons que $\varphi_f : P \mapsto P(f)$ est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathcal{L}(E)$. Son image $\mathbf{Im}\,\varphi_f$ sera notée $\mathbb{K}[f]$. Remarquons aussi que $\mathbb{K}[f]$ contient f.
$P(f)$ est donc un endomorphisme de E et il est défini par

$$\forall x \in E,\ P(f)(x) = a_0x + a_1f(x) + a_2f^2(x) + \cdots + a_pf^p(x).$$

Il faut aussi éviter d'écrire $P(f(x))$ à la place de $P(f)(x)$.

Proposition 2.2. *L'application $\varphi_f : P \mapsto P(f)$ vérifie les propriétés*
(1) $\varphi_f(1) = \mathrm{Id}_E$;
(2) $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi_f(PQ) = \varphi_f(P) \circ \varphi_f(Q)$.

Démonstration. L'égalité (1) est évidente.
Soit $P = \sum_{i=0}^{p} a_iX^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{q} b_jX^j$ deux polynômes. On a

$$\begin{aligned}\varphi_f(PQ) &= \varphi_f\left(\sum_{(i,j)\in[\![0,p]\!]\times[\![0,q]\!]} a_ib_jX^{i+j}\right)\\ &= \sum_{(i,j)\in[\![0,p]\!]\times[\![0,q]\!]} a_jb_jf^{i+j}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\varphi_f(P)\circ\varphi_f(Q) &= \left(\sum_{i=0}^{p} a_if^i\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{q} b_jf^j\right)\\ &= \sum_{(i,j)\in[\![0,p]\!]\times[\![0,q]\!]} \left(a_if^i\right)\circ\left(b_jf^j\right)\\ &= \sum_{(i,j)\in[\![0,p]\!]\times[\![0,q]\!]} a_ib_jf^i\circ f^j\\ &= \sum_{(i,j)\in[\![0,p]\!]\times[\![0,q]\!]} a_ib_jf^{i+j}.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3. (a) Il faut noter que l'ensemble

$$\mathbb{K}[f] = \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

admet non seulement une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel : $(\mathbb{K}[f), +, \cdot)$, mais aussi une structure d'*anneau commutatif* : $(\mathbb{K}(f), +, \circ)$.

(b) La propriété (2) de la proposition précédente signifie que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f),$$

et puisque les puissances de f commutent, on a

$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

(c) Si f et g sont dans $\mathcal{L}(E)$ et si g est bijectif, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(g \circ f \circ g^{-1}) = g \circ P(f) \circ g^{-1}.$$

Supposons que E est de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de f dans une base donnée $\mathcal{B}$. Pour tout $P = \sum_{k=1}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ on défini (de la même façon que $P(f)$)

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p.$$

Proposition 2.4. *Supposons E de dimension finie. Si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E, alors $P(A)$ est la matrice de $P(f)$ dans $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Ceci provient du fait que, pour une base $\mathcal{B}$ fixée

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\colon & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est une application linéaire

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f, g \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f + \lambda g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g),$$

qui vérifie

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g).$$

□

Remarque 2.5. (a) D'après la remarque 2.3 on a pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,

$$(PQ)(A) = P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A).$$

(b) De plus si, A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si B est inversible, alors tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(BAB^{-1}) = B \times P(A) \times B^{-1}.$$

(c) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(A^\top) = (P(A))^\top.$$

(d) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$\overline{P(A)} = \overline{P}(\overline{A}).$$

Exemple 2.6. (1) Soit D l'endomorphisme de dérivation $f \mapsto f'$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, l'endomorphisme $P(D)$ est l'opérateur différentiel

$$f \mapsto a_p f^{(p)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f.

(2) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

et considérons le polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$. Donc $P(A) = A^2 - A - I_3$. Un calcul simple peut montrer que $P(A) = I_3$.

Proposition 2.7. *Soit F un sous-espace de E stable par $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, le sous-espace F est stable par $P(f)$ et, en notant f_F l'endomorphisme induit, on a*

$$P(f)_F = P(f_F).$$

Démonstration. Soit F un sous-espace de E. Si $f(F) \subset F$, alors pour tout entier k, $f^k(F) \subset F$ et par combinaison linéaire $P(f)(F) \subset F$. □

Proposition 2.8. *Les sous-espaces* $\mathbf{Im}\, P(f)$ *et* $\mathbf{Ker}\, P(f)$ *sont stables par f pour tout P de $\mathbb{K}[X]$.*

Démonstration. Puisque $P(f)$ est un endomorphisme qui commute à f, on déduit d'après la proposition 1.2 que les sous-espaces $\mathbf{Im}\, P(f)$ et $\mathbf{Ker}\, P(f)$ sont stables par f. □

3. Polynômes annulateurs et polynôme minimal

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Rappelons l'image et le noyau de l'application φ_f.

L'image de φ_f

$$\mathbf{Im}\, \varphi_f = \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathbb{K}[f]$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Il est en plus stable par la composition des applications.

Le noyau de φ_f

$$\mathbf{Ker}\, \varphi_f = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, en particulier $(\mathbf{Ker}\, \varphi_f, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$. Il est stable par le produit par un élément de $\mathbb{K}[X]$: si $P \in \mathbf{Ker}\, \varphi_f$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $(QP)(f) = Q(f) \circ P(f) = 0$ donc $\mathbf{Ker}\, \varphi_u$ est absorbant, c'est finalement un *idéal* de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Un polynôme de $\mathbf{Ker}\, \varphi_f$ est appelé **polynôme annulateur** de f et l'ensemble $\mathbf{Ker}\, \varphi_f$ est appelé l'**idéal annulateur** de f.

L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau principal, donc l'idéal annulateur $\mathbf{Ker}\, \varphi_f$ de f est engendré par un unique polynôme unitaire. Ce polynôme est nul lorsque cet idéal est nul, unitaire (non nul par conséquent) sinon. d'où la définition suivante.

Définition 3.1. *On dit qu'un endomorphisme f possède un polynôme minimal si son idéal annulateur n'est pas réduit à $\{0\}$. On appelle alors* **polynôme minimal** *de f, et on note π_f, le générateur unitaire de cet idéal.*

Théorème 3.2. *Si E est de dimension finie alors tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme minimal. Autrement dit,* $\mathbf{Ker}\, \varphi_f \neq \{0\}$ *et* $\mathbf{Ker}\, \varphi_f = \pi_f \mathbb{K}[X]$ *où π_f est le polynôme minimal de f.*

Démonstration. Posons $\dim E = n$. Donc $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel de dimension $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$. Par conséquent la famille à n^2+1 éléments $(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n^2})$ est liée. Il existe donc une combinaison linéaire de ces éléments avec des λ_i non tous nuls, soit

$$\lambda_0 \,\mathrm{Id} + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_{n^2} f^{n^2} = 0.$$

On en déduit que $\mathbf{Ker}\,\varphi_f \neq \{0\}$ car il contient le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$. $\mathbf{Ker}\,\varphi_f$ est un idéal non réduit à $\{0\}$, on sait alors qu'il est de la forme $\pi_f \mathbb{K}[X]$ avec $\pi_f \neq 0$ car $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau principal.

$\square$

Remarque 3.3. Le polynôme minimal π_f est, par définition, caractérisé parmi les polynômes unitaires par l'équivalence

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(f) = 0 \Leftrightarrow \pi_f \mid P$$

Autrement dit, π_f est le polynôme unitaire de degré minimal qui est annulé par f.

Supposons E dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de f dans une base donnée $\mathcal{B}$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de A, si $P(A) = 0$. L'idéal annulateur de A est

$$\mathbf{Ker}\,\varphi_A = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0\}.$$

Corollaire 3.4. *Le polynôme minimal de A est égal au polynôme minimal de f.*

Démonstration. En effet, la relation

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} P(f) = P(A)$$

montre que les idéaux annulateurs de f et A sont égaux. $\square$

Remarque 3.5. (a) Si $g \in \mathcal{L}(E)$ est inversible alors les endomorphismes $g \circ f \circ g^{-1}$ et f ont les mêmes polynômes annulateurs et donc le même polynôme minimal,

$$\pi_{g \circ f \circ g^{-1}} = \pi_f.$$

Parapllélement, si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors

$$\pi_{BAB^{-1}} = \pi_A.$$

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et $A^\top$ ont même ensemble de polynômes annulateurs. Elles ont donc le même polynôme minimal,

$$\pi_{A^\top} = \pi_A.$$

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les matrices A et $\bar{A}$ ont des ensembles de polynômes annulateurs conjugués. Elles ont donc des polynômes minimaux conjugués,

$$\pi_{\overline{A}} = \overline{\pi_A}.$$

Exemple 3.6. (1) L'homothétie $f = \lambda \mathrm{Id}$ a pour polynôme minimal $X - \lambda$.

(2) Si p est un projecteur de E, c-à-d. $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$, alors son polynôme minimal est $X^2 - X$.

(3) Si s est une symétrie vectorielle de E, c-à-d. $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = \mathrm{Id}$, alors son polynôme minimal est $X^2 - 1$.

(4) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1/2 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $A^2 - A - 2I_3 = 0$ et $P(X) = X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de A. Ce polynôme est le polynôme minimal de A, puisque $P(X) = (X - 2)(X + 1)$ et que ses diviseurs $X - 2$ et $X + 1$ ne sont pas des polynômes annulateurs de A (car $A - 2I_3 \neq 0$ et $A + I_3 \neq 0$).

Proposition 3.7. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f et $f_{|F}$ la restriction de f à F, alors $\pi_{f_{|F}}$ divise π_f.*

Démonstration. La relation $P\left(f_{|F}\right) = P(f)_{|F}$ montre que l'idéal annulateur de f est contenu dans l'idéal annulateur de $f_{|F}$. Ainsi $\pi_f\left(f_{|F}\right) = 0$ et donc $\pi_{f_{|F}}$ divise π_f □

Théorème 3.8 (Lemme des noyaux)**.** *Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \cdots P_r$ leur produit. Alors*

$$\mathbf{Ker}\, P(f) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathbf{Ker}\, P_k(f).$$

Pour tout k, la projection p_k de $\mathbf{Ker}\, P(f)$ sur $\mathbf{Ker}\, P_k(f)$ associée est l'endomorphisme induit sur $\mathbf{Ker}\, P(f)$.

Démonstration. Montrons d'abord le résultat pour $r = 2$. Le théorème de Bézout nous fournit un couple $(A_1, A_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A_1 P_1 + A_2 P_2 = 1. \tag{1}$$

La valeur en f de cette relation donne

$$(A_1 P_1)(f) + (A_2 P_2)(f) = \mathrm{Id}_E\,.$$

Soit $x \in \mathbf{Ker}\, P_1(f)$. La relation $P(f)(x) = (P_2(f) \circ P_1(f))\,(x) = 0$ montre que x appartient aussi à $\mathbf{Ker}\, P(f)$. On obtient la même chose si x appartient à $\mathbf{Ker}\, P_2(f)$. II vient donc

$$\mathbf{Ker}\, P_1(f) + \mathbf{Ker}\, P_2(f) \subset \mathbf{Ker}\, P(f).$$

D'un autre côté, soit $x \in \mathbf{Ker}\, P(f)$. La relation (1) nous permet d'écrire

$$x = \underbrace{(A_2P_2)\,(f)(x)}_{=x_1} + \underbrace{(A_1P_1)\,(f)(x)}_{=x_2}. \tag{2}$$

L'égalité

$$\begin{aligned} P_1(f)\,(x_1) = P_1((A_2P_2)\,(f)(x)) &= (P_1A_2P_2)\,(f)(x) \\ &= (A_2P_1P_2)\,(f)(x) \\ &= (A_2P)\,(f)(x) \\ &= (A_2(f) \circ P(f))\,(x) = 0 \end{aligned}$$

montre alors que x_1 appartient à $\mathbf{Ker}\, P_1(f)$. On a de la même façon $x_2 \in \mathbf{Ker}\, P_2(f)$. Par conséquent $\mathbf{Ker}\, P(f) \subset \mathbf{Ker}\, P_1(f) + \mathbf{Ker}\, P_2(f)$. D'où

$$\mathbf{Ker}\, P_1(f) + \mathbf{Ker}\, P_2(f) = \mathbf{Ker}\, P(f)$$

Soit maintenant $x \in \mathbf{Ker}\, P_1(f) \cap \mathbf{Ker}\, P_2(f)$. La relation (1) appliquée à x,

$$x = (A_2(f) \circ P_2(f))\,(x) + (A_1(f) \circ P_1(f))\,(x),$$

montre que x est nul. On obtient finalement

$$\mathbf{Ker}\, P_1(f) \oplus \mathbf{Ker}\, P_2(f) = \mathbf{Ker}\, P(f).$$

De plus, la relation (2) montrent que les projections p_1 et p_2 associées à cette somme directe sont les restrictions à $\mathbf{Ker}\, P(f)$ des endomorphismes $(A_1P_1)\,(f)$ et $(A_2P_2)\,(f)$.

On montre le cas général par récurrence sur $r > 2$ en supposant le théorème acquis pour $r-1$. Sous les hypothèses du théorème, les polynômes P_1 et $R_2 = P_2 \cdots P_r$ sont premiers entre eux ; en effet, si leur pgcd ne vaut pas 1, il existe un polynôme irréductible Q divisant P_1 et R_2. Par le lemme de Gauss, Q divisera P_1 et P_k pour un $k \in [\![2, r]\!]$. Cela est impossible. On a donc

$$\mathbf{Ker}\, P(f) = \mathbf{Ker}\, P_1(f) \oplus \mathbf{Ker}\, R_2(f) \tag{3}$$

par le premier point. Il en résulte de l'hypothèse de récurrence la décomposition

$$\mathbf{Ker}\, R_2(f) = \bigoplus_{k=2}^{r} \mathbf{Ker}\, P_k(f)$$

Cela montre la somme directe désirée. De plus, la projection de $\mathbf{Ker}\, P(f)$ sur $\mathbf{Ker}\, P_1(f)$ associée à cette somme directe est celle associée à la somme directe (3). C'est donc la restriction à cet espace d'un polynôme en f. Par permutation, c'est le cas de toutes les projections.

□

Corollaire 3.9. *Si un polynôme P annulateur de f est égal au produit $P_1 \cdots P_r$ d'une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux, alors l'espace E se décompose en la somme directe*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathbf{Ker}\, P_k(f)$$

et les projections associées sont des polynômes en f.

4. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 4.1. (1) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E*

On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** *de f s'il existe un vecteur* **non nul** *v de E tel que $f(v) = \lambda v$.*

Dans ce cas, tout vecteur **non nul** *v de E tel que $f(v) = \lambda v$ s'appelle un* **vecteur propre** *associé à λ.*

On appelle **sous-espace propre** *de f associé à une valeur propre λ, le sous-espace*

$$E_\lambda(f) = \mathbf{Ker}\,(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)\,.$$

On appelle **spectre** *de f, et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$ ou $\mathrm{Sp}(f)$, l'ensemble des valeurs propres de f.*

(2) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carée.*

On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** *de A s'il existe un vecteur* **non nul** *X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$.*

Dans ce cas, tout vecteur **non nul** *X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$ s'appelle un* **vecteur propre** *associé à λ.*

On appelle **sous-espace propre** *de A associé à une valeur propre λ, le sous-espace*

$$E_\lambda(A) = \mathbf{Ker}\,(A - \lambda I_n)\,.$$

On appelle **spectre** *de A, et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou $\mathrm{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.*

Exemple 4.2. (1) Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons AX_1, AX_2, et AX_3. On obtient

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_1, \quad AX_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3X_3, \quad AX_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1X_3,$$

donc,

$AX_1 = 2X_1$: 2 est une valeur propre de A et X_1 est un vecteur propre de A associé à 2 ;

$AX_2 = 3X_2$: 3 est une valeur propre de A et X_2 est un vecteur propre de A associé à 3 ;

$AX_3 = 1X_3$: 1 est une valeur propre de A et X_3 est un vecteur propre de A associé à 1.

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et cherchons ses éléments propres (c-à-d. ses valeurs propres et ses sous-espaces propres).

λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible.

Procédons selon la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 & -3 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &\underset{L_1 \rightleftharpoons L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & -1 \\ 5-\lambda & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 - (5-\lambda)L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -(\lambda-2)(\lambda-6) & -\lambda+2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -(\lambda-2)(\lambda-6) & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit sans peine que λ est valeurs propre de A si, et seulement si, $A - \lambda I_3$ est non inversible ce qui entraîne $\lambda \in \{2; 6\}$, d'où $\operatorname{Sp} A = \{2, 6\}$.

Etude du sous-espace propre E_2

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à E_2 si et seulement si $(A - 2I_3)X = \mathbf{0}$.

Ce qui équivaut à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow x + y - z = 0.$$

E_2 est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. La dimension de E_2 est égale à 2 et une base de E_2 est formée des deux vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Etude du sous-espace vectoriel E_6

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à E_6 si et seulement si $(A-6I_3)X = \mathbf{0}$. Ce qui équivaut à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} x - 3y - z & = 0 \\ z & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = 3y \\ z & = 0 \end{array} \right.$$

La matrice $(A - 6I)$ est de rang 2, donc

$$\dim E_6 = 3 - 2 = 1.$$

La dimension de E_6 est égale à 1 et une base de E_6 est

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) Considérons l'application linéaire dérivation D définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par

$$D(f) = f'$$

et cherchons ses valeurs propres.

$\lambda \in \mathrm{Sp}(D)$ si, et seulement si, il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f \neq 0$, tel que $f' = \lambda f$. Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle $f' = \lambda f$. Sa solution générale est $f(t) = Ke^{\lambda t}$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(D) = \mathrm{Vect}(e^{\lambda t}) = \mathbb{R}e^{\lambda t}$.

(4) Étudions la dérivation D sur $\mathbb{K}[X]$, définie par

$$DP = P'.$$

Un scalaire λ appartient à $\mathrm{Sp}(D)$ si, et seulement s'il existe un polynôme non nul P tel que $P' = \lambda P$. Or $\deg P' < \deg P$ et $\deg \lambda P = \deg P$, donc nécessairement $\lambda = 0$ et le polynôme P est constant. Ainsi $\mathrm{Sp}(D) = \{0\}$ et $E_0(D)$ est l'ensemble des polynômes constants.

Remarque 4.3. (1) Les vecteurs propres de f associés à λ sont les vecteurs **non nuls** de $E_\lambda(f)$.

(2) Un vecteur est appelé vecteur propre de f si c'est un vecteur propre associé à une valeur propre. Celle-ci est unique puisque $\lambda v = \mu v$ et $v \neq \mathbf{0}$ entraîne $\lambda = \mu$.

(3) Les mêmes remarques sont aussi valables pour les éléments propres d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(4) Supposons E de dimension finie n. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'endomorphisme f et sa matrice A dans $\mathcal{B}$ ont mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres isomorphes par l'isomorphisme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}^n$ qui associe à tout vecteur la famille de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

Proposition 4.4. *(a) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a,*

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\Leftrightarrow E_\lambda(f) = \mathbf{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{\mathbf{0}_E\} \\ &\Leftrightarrow f - \lambda\mathrm{Id} \text{ n'est pas injectif} \end{aligned}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a,

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow E_\lambda(A) = \mathbf{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}\} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A - \lambda I_n) < n \end{aligned}$$

En particulier, pour toute A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A).$$

Démonstration. Immédiat. □

Remarque 4.5. Si A est une matrice à coefficients réels, on peut considérer que A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On obtient dans le premier cas, les éléments propres réels, dans le second, les éléments propres complexes de A.

On distinguera donc le spectre réel $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ de A, formé des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $(A - \lambda I_n)$ ne soit pas inversible, du spectre complexe, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, de cette matrice. Plus précisément, on a

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{R}.$$

Cn peut prendre comme exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Comme ce polynôme n'a pas de racines réelles, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$. Par contre χ_A admet $\pm i$ comme racines complexes, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}$.

Proposition 4.6. *Si $x \in E_\lambda(f)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(f)(x) = P(\lambda)x$. En particulier, si λ est une valeur propre de f alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.*

Démonstration. Posons $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$. Soit $x \in E_\lambda(f)$. Comme $f^k(x) = \lambda^k x$ pour tout k, on a

$$P(f)x = \left(\sum_{k=0}^p a_k f^k\right)(x) = \left(\sum_{k=0}^p a_k \lambda^k\right) x = P(\lambda)x.$$

ce qui prouve que si λ est un valeur propre de f, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$. □

Corollaire 4.7. *Si λ est une valeur propre de f, alors λ est racine de tout polynôme annulateur de f.*

Démonstration. Soit P un polynôme annulateur de f. Si λ est une valeur propre de f, la proposition précédente montre si x est un vecteur propre pour la valeur propre λ alors $P(\lambda)x = 0$. On en déduit $P(\lambda) = 0$ puisque x est non nul. □

Théorème 4.8. *Lorsque f possède un polynôme minimal, les valeurs propres de f sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ de ce polynôme.*

Démonstration. Soit π_f le polynôme minimal de f. Le corollaire précédent montre que toute valeur propre de f est racine de π_f (car π_f est un polynôme annulateur de f). Réciproquement, supposons que λ est une racine de π_f. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_f = (X - \lambda)Q$. L'évaluation en f, donne

$$0 = \pi_f(f) = (f - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ Q(f).$$

Si λ n'est pas une valeur propre de f, alors l'application $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ est injective, et il s'ensuit que $Q(f) = 0$, ce qui contredit la minimalité de π_f. □

Proposition 4.9. *Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent alors les sous-espaces propres $E_\lambda(f)$ de f sont stables par g.*

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate de la proposition 1.2 appliquée à $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ et g qui commutent puisque f et g le sont. □

Corollaire 4.10. *Les sous-espaces propres de f sont stables par f.*

Théorème 4.11. Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ *est une famille de valeurs propres de f deux à deux distinctes, alors la famille des sous-espaces vectoriels*

$$E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$$

est en somme directe, i.e.

$$E_{\lambda_1}(f) + \ldots + E_{\lambda_p}(f) = E_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}(f)$$

Démonstration. Les polynômes $(X - \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont deux à deux premiers entre eux. Par le lemme des noyaux, les sous-espaces

$$(\mathbf{Ker}\,(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E))_{1 \leqslant i \leqslant p}$$

sont en somme directe. □

Corollaire 4.12. *Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.*

Démonstration. Soit $x_1, \dots, x_p$ une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ deux à deux distinctes. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p = \mathbf{0}$$

Comme pour tout i, on a $\alpha_i x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ et comme les sous-espaces $E_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe, on déduit que $\alpha_i x_i = \mathbf{0}$ ce qui conduit à $\alpha_i = 0$ puisque $x_i \neq \mathbf{0}$. □

5. Polynôme caractéristique

On suppose dans ce paragraphe que E est de dimension finie n.

Étant donnée une matrice carrée A d'ordre n, on cherche un polynôme dont les racines sont précisément les valeurs propres de A.

Si A est une matrice diagonale ou plus généralement une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots,$ λ_n de A et nous pouvons définir le polynôme caractéristique comme étant

$$(\lambda_1 - X)\,(\lambda_2 - X)\ldots(\lambda_n - X)$$

Ce polynôme est le déterminant $\det(A - XI_n)$.

Pour une matrice quelconque A, si λ est une valeur propre de A, alors il existe un vecteur colonne propre v non nul tel que $Av = \lambda v$, soit ($(A - \lambda I_n)v = \mathbf{0}$). Puisque v est non nul, la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, et donc a un déterminant nul. Cela montre que les valeurs propres de A sont des zéros de la fonction $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ ou des racines du polynôme $\det(A - XI_n)$.

Définition 5.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Le* **polynôme caractéristique** *de A, noté $\chi_A(X)$, est le polynôme défini par*

$$\chi_A(X) := \det(A - XI_n)\,. \tag{4}$$

Remarque 5.2. Au lieu de l'expression (5), certains auteurs définissent le polynôme caractéristique comme étant $\det(XI_n - A)$. Avec cette définition, le polynôme caractéristique est unitaire. Ceci n'est pas le cas pour la définition (5), puisque l'on a : $\det(A - XI_n) = (-1)^n \det(XI_n - A)$. La définition (5) présente l'"avantage" que $\chi_A(0) = \det A$.

Exemple 5.3. (1) Le polynôme caractéristique d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est

$$\begin{aligned}\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} &= X^2 - (a+d)X + ad - bc \\ &= X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A).\end{aligned}$$

(2) Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} a_1 - X & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 - X & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 - X \end{vmatrix} \\ &= -X^3 + aX^2 - bX + c \end{aligned}$$

où

$$a = \operatorname{tr}(A), \quad c = \det(A)$$

et

$$b = \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \end{vmatrix}$$

(ce sont tous les déterminants extraits d'ordre 2 qui contiennent deux termes diagonaux de A).

Plus généralement, on a

Proposition 5.4. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,*

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}X^{n-1} + (-1)^{n-2}\alpha_{n-2}X^{n-2} + \cdots + \alpha_0$$

avec

$$\alpha_{n-1} = \operatorname{tr}(A), \quad \alpha_0 = \det(A)$$

et

$$\alpha_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det\left(A_{i,j}\right)$$

où les $\det\left(A_{i,j}\right)$, pour $1 \leq i < j \leq n$, sont tous les déterminants extraits d'ordre 2 qui contiennent deux termes diagonaux de A, soit

$$\det\left(A_{i,j}\right) = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} (1 \leq i < j \leq n)$$

Démonstration. Soit $A = (a_{i,j})$.

La matrice $(A - XI_n)$ est une matrice à coefficient $(a_{i,j} - X\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Son déterminant, donné par

$$\det(A - XI_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\left(a_{\sigma(1),1} - X\delta_{\sigma(1),1}\right) \cdots \left(a_{\sigma(n),n} - X\delta_{\sigma(n),n}\right).$$

C'est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Lorsque σ n'est pas l'identité, il existe au moins deux éléments distincts i et j de $[\![1, n]\!]$ tels que $\delta_{\sigma(i),i}$ et $\delta_{\sigma(j),j}$ soient nuls et le terme

$$\varepsilon(\sigma)\left(a_{\sigma(1),1} - X\delta_{\sigma(1),1}\right) \ldots \left(a_{\sigma(n),n} - X\delta_{\sigma(n),n}\right)$$

est de degré intérieur ou égal à $n-2$. Le terme de degré $n-2$ est donc précisément

$$(-1)^{n-2}\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} \det\left(A_{i,j}\right)\right) X^{n-2}.$$

Les termes de degré n et $n-1$ de $\chi_A(X)$ sont ceux du produit

$$\left(a_{1,1}-X\right)\cdots\left(a_{n,n}-X\right),$$

soit $(-1)^n X^n$ et $(-1)^{n-1}\left(\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{n,n}\right) X^{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A) X^{n-1}$ respectivement. On obtient finalement le terme constant $a_0 = \det A$ de $\chi_A(X)$ en évaluant en 0 . □

Exemple 5.5. Si $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est

$$\chi_\theta(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1.$$

Proposition 5.6. *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $P \in \mathrm{GL}_(\mathbb{K})$,*

$$\chi_{PAP^{-1}} = \chi_A.$$

Par conséquent A et PAP^{-1} ont même valeurs propres.

Démonstration. On a en effet :

$$\det\left(PAP^{-1} - XI_n\right) = \det\left(P\left(A - XI_n\right)P^{-1}\right) = \det\left(A - XI_n\right).$$

□

Définition 5.7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f, noté $\chi_f(X)$, est le polynôme défini par*

$$\chi_f(X) := \det\left(f - X\mathrm{Id}\right). \tag{5}$$

Si f a pour matrice A dans une base de E, alors A et f ont même polynôme caractéristique.

Corollaire 5.8. *Soient f est un endomorphisme de E et g un automorphisme de E. Alors*

(a) f et $g\circ f\circ g^{-1}$ ont le même polynôme caractéristique (et donc même valeurs propres) ;

(b) pour toute valeurs propre λ, on a $E_\lambda(g\circ f\circ g^{-1}) = g\left(E_\lambda(f)\right)$.

Démonstration. Le point (a) découle de la proposition 5.6. On peut même voir que f et $g\circ f\circ g^{-1}$ ont les mêmes polynômes annulateurs d'après la remarque 2.3.

(b) Soit λ une valeur propre de f et soit $x \in E_\lambda(f)$. On a $f(x) = \lambda x$ et

$$g\circ f\circ g^{-1}(g(x)) = g(f(x)) = \lambda g(x)$$

Donc $g(x) \in E_\lambda\left(g \circ f \circ g^{-1}\right)$. D'où

$$g\left(E_\lambda(f)\right) \subset E_\lambda(g \circ f \circ g^{-1}). \tag{6}$$

On applique maintenant l'inclusion (6) que nous venons de démontrer à l'endomorphisme $f' = g \circ f \circ g^{-1}$ et à l'automorphisme g^{-1}. On trouve

$$g^{-1}\left(E_\lambda(g \circ f \circ g^{-1})\right) \subset E_\lambda(g^{-1} \circ (g \circ f \circ g^{-1}) \circ g) = E_\lambda(f)$$

ce qui donne en composant par g,

$$E_\lambda(g \circ f \circ g^{-1}) \subset g\left(E_\lambda(f)\right)$$

□

Proposition 5.9. *Si F est un sous espace vectoriel de E stable par $f \in \mathcal{L}(E)$, alors le polynôme caractéristique de la restriction de f à F divise celui de f.*

Démonstration. On désigne par $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E . Dans cette base la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

A_1 est la matrice, dans la base $\mathcal{B}_1$, de la restriction $f_{|F}$ de f à F (F est stable par f). On déduit que le polynôme caractéristique de f s'écrit

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \det \begin{pmatrix} A_1 - XI_p & A_2 \\ 0 & A_3 - XI_{n-p} \end{pmatrix} \\ &= \det\left(A_1 - XI_p\right) \det\left(A_3 - XI_{n-p}\right) \\ &= \chi_{f_{|F}}(X) \det\left(A_3 - XI_{n-p}\right) \end{aligned}$$

On en déduit alors que χ_f est un multiple du polynôme caractéristique de la restriction de f à F. □

Proposition 5.10. *Soit $(E_1, \ldots, E_r)$ une famille de sous-espaces de E telle que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$. Si $f \in \mathcal{L}(E)$stabilise chaque E_i, $1 \leq i \leq r$, alors le polynôme caractéristique de f est donnée par*

$$\chi_f(X) = \chi_{f_1}(X) \cdots \chi_{f_r}(X)$$

où f_i est l'endomorphisme induit par f sur E_i quel que soit i.

Démonstration. Dans une base adaptée à la somme directe considérée, la matrice de f est une matrice diagonale par blocs dont le $i^{\text{ième}}$ bloc diagonal est la matrice A_i de f_i. Le déterminant de la matrice diagonale par blocs $A - XI_n$ est donc le produit des polynômes caractéristiques des f_i.

□

Théorème 5.11. *Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si, et seulement si, c'est une racine du polynôme caractéristique de f.*

Démonstration. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre si, et seulement si, $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible c'est-à-dire

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E) = 0$$

□

Corollaire 5.12. *(a) Un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres distinctes.*

(b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors f a au moins une valeur propre.

(c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si n est impair, alors f a au moins une valeur propre.

Exemple 5.13. (1) Si $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est

$$\chi_\theta(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$$

Si $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ ce polynôme n'a pas de racine réelle et on a donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R_\theta) = \emptyset$

Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors dans ce cas $R_\theta = \pm I_2$.

Si on considère R_θ comme une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors son polynôme caractéristique a deux racines complexes,

$$\chi_\theta(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

soit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(R_\theta) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$.

(2) Si $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une matrice de réflexion dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est

$$P_\theta(X) = X^2 - 1$$

et $\mathrm{Sp}(S_\theta) = \{-1, 1\}$.

(3) Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est donné par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} X-2 & -5 & 6 \\ -4 & X-6 & 9 \\ -3 & -6 & X+8 \end{vmatrix}$$

La somme des coefficients des lignes du déterminant ci-dessus étant $X - 1$, l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ montre que l'on a

$$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1 & X-6 & 9 \\ 1 & -6 & X+8 \end{vmatrix}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ conduisent à :

$$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & X-1 & 3 \\ 0 & -1 & X+2 \end{vmatrix} = (X-1)\left(X^2+X+1\right).$$

Le spectre de A est donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, j, j^2\}$ dans $\mathbb{C}$ et seulement $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 5.14. Calculer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

pour $n \geq 3$.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -X & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -X & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

En retranchant la colonne n à la colonne 1 et la colonne $n-1$ aux colonnes $k = 2, \cdots, n-2$, on obtient

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -X & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -X & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & X & X & X & \cdots & -X & 1 \\ X & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= X^{n-2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -X & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

et en ajoutant la ligne 1 à la ligne n, cela donne

$$P_A(X) = X^{n-2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$= -X^{n-2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & -X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2-X \end{vmatrix}$$

En ajoutant la ligne k à la ligne $n-2$, pour $k = 2, \cdots, n-3$, on obtient

$$P_A(X) = -X^{n-2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -X & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$= -X^{n-2}(-1)^{n-3} \begin{vmatrix} -X & n-2 \\ 2 & 2-X \end{vmatrix} = (-1)^n X^{n-2}(X(X-2) - 2(n-2))$$

$$= (-1)^n X^{n-2} \big((X-1)^2 - (2n-3)\big)$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 0$ d'ordre $n-2, \lambda_2 = 1 - \sqrt{2n-3}$ et $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2n-3}$ qui sont simples.
En conclusion, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1-\sqrt{2n-3}, 1+\sqrt{2n-3}\}$.

Définition 5.15. *On appelle* **ordre de multiplicité** *d'une valeur propre λ de f, et l'on note $m(\lambda)$, sa multiplicité dans le polynôme caractéristique de f.*

Proposition 5.16. *Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. On a*

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant m(\lambda).$$

Démonstration. Le sous-espace propre $F := E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id})$ n'étant pas réduit au vecteur nul, sa dimension, notée $d(\lambda)$, est supérieure ou égale à 1.

Le sous-espace F est stable par f et la restriction $g = f_{|F}$ est une homothétie de rapport λ. Donc $\chi_g(X) = (\lambda - X)^{d(\lambda)}$ et $\chi_g(X)$ divise $\chi_f(X)$.

L'ordre de multiplicité de λ est $m(\lambda)$, donc le polynôme $(\lambda - X)^{m(\lambda)}$ divise $\chi_f(X)$ et le polynôme $(\lambda - X)^{m(\lambda)+1}$ ne divise pas $\chi_f(X)$. Il s'ensuite que $d(\lambda) \leqslant m(\lambda)$.

□

Corollaire 5.17. *Si λ est une racine simple de χ_f, alors* $\dim E_\lambda(f) = 1$.

Exemple 5.18. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de f de rang 1. Il est claire que f n'est pas bijectif, et donc $0 \in \mathrm{Sp}(f)$. Le sous-espace propre de la valeur propre 0 est $\mathbf{Ker}\, f$ et il est de dimension $n-1$ (d'après le théorème du rang). En utilisant la proposition 5.16, on a $1 \leq n-1 \leq m(0)$ et par conséquent le polynôme caractéristique de f est de la forme $\chi_f(X) = X^{n-1}Q(X)$. Le polynôme Q étant nécessairement de degré 1, il est de la forme $Q(X) = aX + b$ et d'après la proposition 5.4, on a $a = (-1)^n$ et $b = (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(f)$ d'où

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^{n-1}(X - \mathrm{tr}(f))$$

et $\mathrm{Sp}(f) = \{0, \mathrm{tr}(f)\}$. La valeur propre 0 est de multiplicité n si $\mathrm{tr}(f) = 0$, et de multiplicité $n-1$ sinon.

Définition 5.19. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est* **scindé** *sur $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme produit de facteurs du premier degré de $\mathbb{K}[X]$ et qu'il est* **scindé simple** *sur $\mathbb{K}$ si de plus ses racines sont simples.*

Définition 5.20. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est scindé si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et qu'il est scindé simple si son polynôme caractéristique est scindé simple.*

Rappelons le théorème de d'Alembert-Gauss : "Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet *au* moins une racine complexe".

Proposition 5.21. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est scindé.*

Démonstration. En effet, le polynôme $\chi_f \in \mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe λ_1. Donc $\chi_f(X) = (X - \lambda_1)Q_1(X)$. On applique aussi le théorème de d'Alembert-Gauss à Q_1 pour obtenir $\chi_f(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)Q_2(X)$ et ainsi de suite. □

Proposition 5.22. *Si f est scindé, alors l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace stable est scindé.*

Démonstration. Soit F un sous-espace de E stable par f. D'après la proposition 5.9 $\chi_{f_{|F}}$ divise χ_f. Donc si χ_f est scindé, $\chi_{f_{|F}}$ l'est aussi. □

Proposition 5.23. *Si le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{K}$, alors*

$$\mathrm{tr}\, f = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \lambda \quad \textit{et} \quad \det f = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \lambda,$$

où les valeurs propres sont comptées avec leur multiplicité.

Démonstration. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les racines de χ_f comptées avec leurs multiplicité, alors $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$. En considérant le terme de degré $n-1$ et le terme constant et les comparant à l'expression du polynôme caractéristique de la proposition 5.4 on obtient $\operatorname{tr} f = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $\det f = \prod_{i=1}^n \lambda_i$. □

Théorème 5.24 (Théorème de Hamilton-Cayley)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors χ_f est un polynôme annulateur de f, c-à-d.*

$$\chi_f(f) = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}.$$

Démonstration. Montrons d'abord que, pour tout vecteur x de E, $\chi_f(x) = \mathbf{0}_E$.

Si $x = \mathbf{0}_E$, c'est immédiat. Supposons maintenant que x est différent de $\mathbf{0}_E$. Soit

$$I = \{p \in \mathbb{N} \mid \left(f^k(x)\right)_{k \leqslant p} \quad \text{est une famille libre } \}$$

La partie I étant une partie non vide de $\mathbb{N}$ et majorée par $n = \dim E$, elle possède un plus grand élément s.

Soit $E(x)$ l'espace vectoriel

$$E(x) = \operatorname{Vect}\{f^k(x) \mid k \leqslant s\}.$$

Il est claire que $B = \left(f^k(x)\right)_{k \leqslant s}$ est une base de $E(x)$. D'autre part, la famille $\left(f^k(x)\right)_{k \leqslant s+1}$ est liée car s est le plus grand élément de I. Il existe donc $(a_0, \ldots, a_s)$ de $\mathbb{K}^{s+1}$ tel que :

$$f^{s+1}(x) = \sum_{k=0}^{s} a_k f^k(x). \tag{7}$$

L'image de $E(x)$ par f est le sous-espace vectoriel

$$f(E(x)) = \operatorname{Vect}\left\{f^{k+1}(x)/k \leqslant s\right\},$$

et la relation (7) prouve que $f^{s+1}(x)$ appartient à $E(x)$. Par conséquent, le sous-espace $E(x)$ est stable par f.

La stabilité de $E(x)$ par f permet de considérer l'endomorphisme $g = f_{|E(x)}$ de $E(x)$. Comme le polynôme caractéristique χ_g de g divise celui de f, il existe un polynôme Q tel que $\chi_f = Q\chi_g$, d'où

$$\chi_f(f) = Q(f) \circ \chi_g(f).$$

Il suffit donc de montrer $\chi_g(f)(x) = \mathbf{0}_E$.

La matrice de g dans la base $B = \left(f^k(x)\right)_{k \leqslant s}$ de $E(x)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_s \end{pmatrix}$$

Donc

$$\chi_g(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -X & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_s - X \end{vmatrix}$$

On remplace la ligne L_1 par $L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \cdots + X^{s-1}L_s$ et on trouve

$$\chi_g(X) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & R(X) \\ 1 & -X & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_s - X \end{vmatrix}$$

où $R(X) = -X^{s+1} + \sum_{k=0}^{s} a_k X^k$. Puis en développant par rapport la première ligne on trouve

$$\chi_g(X) = (-1)^s R(X)$$

d'où

$$\chi_g(f)(x) = (-1)^s \left(\sum_{k=0}^{s} a_k f^k(x) - f^{s+1}(x) \right) = \mathbf{0}_E.$$

□

Corollaire 5.25. (a) *Le polynôme minimal de f divise le polynôme caractéristique de f.*

(b) *Le degré du polynôme minimal est inférieur ou égal à la dimension de E.*

(c) Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont les mêmes racines à des ordres de multiplicité éventuellement différents.

Remarque 5.26. (1) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de f s'écrit alors

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

avec $\alpha_k \in \mathbb{N} - \{0\}$ et les λ_k deux à deux distincts. Le polynôme minimal π_f étant un diviseur de χ_f avec les mêmes racines, il s'écrit

$$\pi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$$

avec $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$.

On en déduit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, $\chi_f(X) = (-1)^n X^n$.

(2) Dans le cas où l'endomorphisme f est inversible, le théorème de Cayley-Hamilton nous donne un moyen de calculer l'inverse de f, si on connaît son polynôme caractéristique χ_f.

En effet l'égalité $\chi_f(f)=0$ avec $\chi_f(X)=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ donne

$$f^{-1}=-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n}a_kf^{k-1}=-\frac{1}{\det(f)}\sum_{k=1}^{n}a_kf^{k-1}.$$

On retrouve aussi le fait que f^{-1} est un polynôme en f.

(3) Le théorème de Cayley-Hamilton permet également de calculer f^p pour tout entier p supérieur ou égal à n en fonction de $\mathrm{Id}, f, \cdots, f^{n-1}$.

En effet pour $p=n$, de $\chi_f(f)=\sum_{k=0}^n a_kf^k=0$ avec $a_n=(-1)^n$, on déduit que $f^n=(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}a_kf^k$ et pour $p>n$ la division euclidienne de X^p par χ_f, donne $X^p=Q(X)\chi_f(X)+R(X)$ avec $\deg(R)<n$, d'où $f^p=R(f)$.

Corollaire 5.27. *Pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_A(A)=\mathbf{0}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.*

Exemple 5.28. Déterminons le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}$$

On a

$$\chi_A(X)=\begin{vmatrix}1-X&0&1\\0&2-X&0\\2&0&-X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-X&0&1\\0&2-X&0\\-X^2+X+2&0&0\end{vmatrix}$$
$$=(X-2)(-X^2+X+2)=-(X-2)^2(X+1)$$

Donc 2 est une valeur propre double et -1 est une valeur propre simple.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme

$$-(X-2)^2(X+1)=-X^3+3X-4$$

est annulateur de A. Le polynôme minimal π_A divise

$$-X^3+3X^2-4$$

Les polynômes qui divisent χ_A sont $X-2$, $X+1$, $(X-2)(X+1)$, $(X-2)^2$ et χ_A.

π_A ne peut pas être $X-2$ ou $X+1$, car $A-2I\neq 0$ et $A+I\neq 0$.

Les deux polynômes de degré 2 qui divisent χ_A sont $(X-2)^2$ et $(X-2)(X+1)$. Nous vérifions que

$$(A-2I)^2\neq 0 \quad \text{et} \quad (A-2I)(A+I)=0.$$

Donc, $\pi_A(X)=(X-2)(X+1)=X^2-X-2$ est le polynôme minimal de A.

Exemple 5.29 (Matrice compagnon). Soit

$$P=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$$

un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle **matrice compagnon** de P, la matrice :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de C_P est $\chi_{C_P}(X) = (-1)^n P(X)$ et son polynôme minimal est $\pi_{C_P}(X) = P(X)$. En effet,

$$\chi_{C_P}(X) = \det(C_P - XI_n) = \begin{vmatrix} -X & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} - X \end{vmatrix}$$

Ajoutons à la première ligne la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n-1} X^k L_k$, où L_k représente la $k$ème ligne. On obtient alors

$$\chi_{C_P}(X) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & \cdots & 0 & -P(X) \\ 1 & -X & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} - X \end{vmatrix} = (-1)^n P(X)$$

URL: `http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Alg-Lin2/`