CHAPITRE 1
DÉTERMINANTS

Table des matières

1. Permutations d'un ensemble fini

Nous allons donner ici une brève introduction au groupe de permutations. Tous les résultats de ce paragraphe seront admis. Pour plus de détails, vous pouvez consulter le chapitre 4 du cours Algèbre 2 en suivant lien suivant :
`http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Algebre2/`

Soit $[\![1,n]\!]$ l'ensemble $\{1,\cdots,n\}$ des n premiers entiers. Une **permutation** de $[\![1,n]\!]$ est une application bijective de $[\![1,n]\!]$ dans lui même. L'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ sera noté par $\mathcal{S}_n$ ou par $\mathfrak{S}_n$. Une permutation $\sigma\in\mathcal{S}_n$ sera désignée par le tableau de ses valeurs

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

Par exemple dans $\mathcal{S}_4$ la permutation

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$

est la permutation qui envoie 1 sur 3, 3 sur 1 et laisse fixes 2 et 4.

La permutation identique sera désignée par Id.

Proposition 1.1. *Muni de la composition des applications, $\mathcal{S}_n$ est un groupe. Son ordre (cardinal) est égal $n!$. Le groupe $\mathcal{S}_n$ est appelé* **groupe symétrique** *de degré n ou bien* **groupe de permutations** *de $[\![1,n]\!]$.*

Démonstration. En effect, on vérifie assez facilement que :
- si $\sigma_1,\sigma_2\in\mathcal{S}_n$, alors $\sigma_1\circ\sigma_2\in\mathcal{S}_n$;
- Id est l'élément neutre de $\mathcal{S}_n$, c-à-d. pour tout $\sigma\in\mathcal{S}_n$, $\mathrm{Id}\circ\sigma=\sigma\circ\mathrm{Id}=\sigma$;

Date: version 19 septembre 2023 • Khalid Koufany.

– la loi de composition est associative, c-à-d. pour tout $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{S}_n$, on a $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$;

– tout élément de $\mathcal{S}_n$ est inversible, c-à-d. pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, la bijection réciproque σ^{-1} est un élément de $\mathcal{S}_n$ et on a $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{Id}$.

Calculons maintenant le cardinal de $\mathcal{S}_n$. Une permutation $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ est donc la donnée, pout tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ d'une unique image dans $\{1, 2, \cdots, n\}$. Aussi, nous effectuons un raisonnement par arbre : il y a n choix pour 1, $(n-1)$ choix pour 2, etc... jusqu'à 1 seul choix pour n d'où il y a $n!$ permutations différentes.

□

Dans la suite, la composition de deux permutations $\sigma \circ \tau$ sera désignée par $\sigma\tau$.

Définition 1.2. *Une* **transposition** *de $\mathcal{S}_n$ est un élément $\tau \in \mathcal{S}_n$ qui permute deux éléments de $[\![1, n]\!]$ et laisse les autre fixes. Une transposition sera désignée par $\tau = (i\ j)$ avec $i \neq j$, celle-ci vérifie*

$$\begin{cases} \tau(i) = j, \\ \tau(j) = i, \\ \tau(x) = x \quad \textit{pour tout } x \in [\![1, n]\!] \setminus \{i, j\}. \end{cases}$$

Un **cycle** *de longueur k est une permutation de $\mathcal{S}_n$, notée $\sigma = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_k)$, où $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont des éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, vérifiant :*

$$\begin{cases} \sigma(x_1) = x_2, \\ \sigma(x_2) = x_3, \\ \vdots \\ \sigma(x_{k-1}) = x_k \\ \sigma(x_k) = x_1, \\ \sigma(x) = x \qquad \textit{pour tout } x \in [\![1, n]\!] \setminus \{x_1, \cdots, x_k\}. \end{cases}$$

autrement dit, $\sigma = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_k)$ permute circulairement $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et laissent fixes les autres éléments de $[\![1, n]\!]$.

Exemple 1.3. Le groupe $\mathcal{S}_2$ est d'ordre 2, se compose de Id et de la transposition $\tau = (1\ 2)$. Il est trivialement commutatif.

Le groupe $\mathcal{S}_3$ est d'ordre $3! = 6$, se compose de Id, de trois transpositions $\tau_{12} = (1\ 2)$, $\tau_{13} = (1\ 3)$, $\tau_{23} = (2\ 3)$ et de deux cycles $c = (1\ 2\ 3)$, $c' = (1\ 3\ 2)$. On peut remarquer que $c\tau_{23} = \tau_{12}$ alors que $\tau_{23}c = \tau_{13}$. Par conséquent $\mathcal{S}_3$ n'est pas commutatif et pour tout $n \geq 3$, $\mathcal{S}_n$ n'est pas commutatif, car il contient $\mathcal{S}_3$.

Théorème 1.4. *Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{Id\}$ se décompose en produit de transpositions*

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k.$$

Définition 1.5. *Soit une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On dit qu'un couple $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$ est une* **inversion** *de σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.*
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ, et on définit la **signature** *de la permutation σ par*

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}.$$

La signature d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est également donnée par la formule

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

On dit qu'une permutation σ est **paire** *si $\varepsilon(\sigma) = +1$ et* **impaire** *si $\varepsilon(\sigma) = -1$.*

Exemple 1.6. Soit la permutation

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$$

Les couples qui présentent une inversion de σ sont $(1,3)$, $(2,3)$ et $(4,5)$. Donc $I(\sigma) = 3$ et $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$.

Remarque 1.7. Soit une permutation

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{smallmatrix}.\right)$$

$I(\sigma)$ se calcule en dénombrant, pour chaque terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suivent.

Par exemple le nombre d'inversions de

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 1 & 7 & 9 & 5 & 10 & 3 & 8 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

est $I(\sigma) = 3+4+0+3+4+2+3+1+1+0 = 21$, donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{21} = -1$.

Proposition 1.8. *La signature vérifie les propriétés suivantes :*
(*a*) $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$.
(*b*) *Pour tout* $\sigma, \rho \in \mathcal{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\rho) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\rho)$.
(*c*) *Pour tout* $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Proposition 1.9. *Si* $c \in \mathcal{S}_n$ *est un cycle de longueur* k*, alors sa signature est* $\varepsilon(c) = (-1)^{k-1}$. *En particulier toute transposition* $\tau = (i\ j) \in \mathcal{S}_n$ *est de signature* -1 *(et donc une permutation impaire).*

Théorème 1.10. *Toute permutation* $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{Id\}$ *se décompose en produit de cycles deux à deux disjoints (le groupe* $\mathcal{S}(E)$ *est engendré par les cycles). Cette décomposition est unique à l'ordre près.*

Exemple 1.11. (a) Soit la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

On a $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 5$, $\sigma(5) = 1$, ce qui donne le premier cycle $\gamma_1 = (1,2,3,4,5)$.

Puis $\sigma(6) = 7$, $\sigma(7) = 6$ d'où le deuxième cycle $\gamma_2 = (6,7)$.

On a donc $\sigma = \gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$ et $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\gamma_1)\varepsilon(\gamma_1) = (-1)^{5-1} \times (-1) = -1$.

(b) On a

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{smallmatrix}\right) = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$$

et donc $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1\ 2\ 3))\varepsilon((4\ 5)) = (-1)^{3-1} \times (-1) = -1$.

2. Applications multi-linéaires

Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et p un entier naturel non nul.

Définition 2.1. *Une* **application p-linéaire** *de* E *dans* F *est une application* f *de* $E^p = E \times \cdots \times E$ *dans* F *telle que pour toute famille* $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *de* E^p *et pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$*, l'application :*

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f\left(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_p\right) \end{aligned}$$

soit une application linéaire.

Une **forme p-linéaire** *sur* E *est une application* p*-linéaire de* E *dans* $\mathbb{K}$.

Exemple 2.2. (a) Une application linéaire $f\colon E \to F$ est une application 1-linéaire.

(b) L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire, c-à-d. 2-linéaire, sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E, alors l'application

$$(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$$

est une forme bilinéaire sur E.

(d) L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \int_0^1 u(t)v(t)dt \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

(e) L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^p &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z_1, z_2, \ldots, z_p) &\longmapsto z_1 z_2 \cdots z_p \end{aligned}$$

est une application p-linéaire sur $\mathbb{C}$.

2.1. **Expression d'une application p-linéaire en dimension finie.** On munit E d'une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

– **Applications bilinéaires** ($p = 2$)**.**

Si f est une application bilinéaire de E dans F et si u et v sont deux vecteurs de E tels que

$$u = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^n b_i e_i$$

alors on a

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f\left(\sum_{k=1}^n a_k e_k, \sum_{l=1}^n b_l e_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k f\left(e_k, \sum_{l=1}^n b_l e_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{l=1}^n b_l f(e_k, e_l)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_k b_l f(e_k, e_l). \end{aligned}$$

Réciproquement, si $(y_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ est une famille de vecteurs de F, l'application

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{i=1}^n b_i e_i\right) \mapsto \sum_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2} a_k b_l y_{k,l}$$

est une application bilinéaire de E dans F.

– **Applications trilinéaires** ($p = 3$)**.**

Si f est une application trilinéaire de E dans F et si u_1, u_2 et u_3 sont trois vecteurs de E tels que

$$u_1 = \sum_{i=1}^n a_{i,1} e_i, \ u_2 = \sum_{i=1}^n a_{i,2} e_i, \ u_3 = \sum_{i=1}^n a_{i,3} e_i$$

alors, on a

$$\begin{aligned}
f(u_1,u_2,u_3) &= f\left(\sum_{k=1}^n a_{k,1}e_k, \sum_{l=1}^n a_{l,2}e_l, \sum_{m=1}^n a_{m,3}e_m\right)\\
&= \sum_{k=1}^n a_{k,1} f\left(e_k, \sum_{l=1}^n a_{l,2}e_l, \sum_{m=1}^n a_{m,3}e_m\right)\\
&= \sum_{k=1}^n a_{k,1}\left(\sum_{l=1}^n a_{l,2} f\left(e_k, e_l, \sum_{m=1}^n a_{m,3}e_m\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^n a_{k,1}\left(\sum_{l=1}^n a_{l,2}\left(\sum_{m=1}^n a_{m,3} f(e_k,e_l,e_m)\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^n a_{k,1}a_{l,2}a_{m,3} f(e_k,e_l,e_m).
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $(y_{i,j,k})_{(i,j,k)\in[\![1,n]\!]^3}$ est une famille de vecteurs de F, l'application

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i, \sum_{i=1}^n a_{i,2}e_i, \sum_{i=1}^n a_{i,3}e_i\right) \longmapsto \sum_{(k,l,m)\in[\![1,n]\!]^3} a_{k,1}a_{l,2}a_{m,3}y_{k,l,m}$$

est une application trilinéaire de E dans F.

Proposition 2.3 (Cas général)**.** *Soit f une application p-linéaire de E dans F. Si $u_1,u_2,\dots,u_p$ sont p vecteurs de E tels que :*

$$\forall j\in[\![1,p]\!],\ u_j=\sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$$

alors on a

$$f(u_1,u_2,\dots,u_p)=\sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \cdots\\ 1\leqslant i_p\leqslant n}} a_{i_1,1}a_{i_2,2}\dots a_{i_p,p} f\left(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_p}\right)$$

Démonstration. Vérifions cette formule par récurrence sur p.

Soit f une application 1-linéaire sur E, c'est-à-dire une application linéaire sur E. Si $u_1=\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i$, on a $f(u_1)=\sum_{i=1}^n a_{i,1}f(e_i)$, ce qui démontre la relation pour $p=1$.

Supposons la formule vérifiée au rang $p-1$, avec $p\geqslant 2$. Soit f une application p-linéaire de E dans F et $u_1,u_2,\dots,u_p\in E$ tels que

$$\forall j\in[\![1,p]\!], u_j=\sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i.$$

Par linéarité de l'application $x\mapsto f(u_1,u_2,\dots,u_{p-1},x)$ on a

$$f(u_1,u_2,\dots,u_p)=\sum_{i_p=1}^n a_{i_p,p} f\left(u_1,u_2,\dots,u_{p-1},e_{i_p}\right) \tag{1}$$

Or, pour tout entier $i_p\in[\![1,n\rfloor$, l'application

$$(x_1,x_2,\dots,x_{p-1})\mapsto f\left(x_1,x_2,\dots,x_{p-1},e_{i_p}\right)$$

est une application $(p-1)$-linéaire, donc d'après l'hypothèse de récurrence il en résulte

$$f\left(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, e_{i_p}\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant n \\ 1 \leqslant i_2 \leqslant n \\ \cdots \\ 1 \leqslant i_{p-1} \leqslant n}} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \ldots a_{i_{p-1},p-1} f\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}\right)$$

ce qui, en remplaçant dans l'égalité (1), donne

$$f\left(u_1, u_2, \ldots, u_p\right) = \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_p,p} \Bigg(\sum_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant n \\ 1 \leqslant i_2 \leqslant n \\ \cdots \\ 1 \leqslant i_{p-1} \leqslant n}} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \ldots a_{i_{p-1},p-1} f\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}\right) \Bigg)$$

et prouve la relation au rang p.

Réciproquement, si $\left(y_{i_1,\ldots,i_p}\right)_{(i_1,\ldots,i_p) \in [\![1,n]\!]^p}$ est une famille de vecteurs de F, alors l'application

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,p} e_i \right) \longmapsto \sum_{(i_1,\ldots,i_p) \in [\![1,n]\!]^p} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_p,p} y_{i_1,\ldots,i_p}$$

est une application p-linéaire de E dans F. □

2.2. **Applications p-linéaires alternées.** On va étudier à présent une famille importante des applications p-linéaires.

Définition 2.4. *Une application p-linéaire f de E dans F est* **alternée** *si pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in E^p$ et pour tout $i \neq j$, on a*

$$u_i = u_j \Rightarrow f\left(u_1, u_2, \ldots, u_p\right) = 0.$$

Proposition 2.5. *f est une application p-linéaire alternée, si et seulement si, f* **antisymétrique**, *c'est-à-dire vérifie pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in E^p$ et pour tout $i < j$:*

$$f(u_1, \cdots, \underset{i^{\text{ème}}}{\underset{\downarrow}{u_i}}, \cdots, \underset{j^{\text{ème}}}{\underset{\downarrow}{u_j}}, \cdots, u_p) = -f(u_1, \cdots, \underset{i^{\text{ème}}}{\underset{\downarrow}{u_j}}, \cdots, \underset{j^{\text{ème}}}{\underset{\downarrow}{u_i}}, \cdots, u_p)$$

Démonstration. Supposons f alternée. Étant donnés i et j tels que $i < j$, fixons $u_1, u_2, \ldots, u_p$. L'application g :

$$\begin{aligned} E^2 &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto f\big(u_1, \ldots, \underset{i^{\text{ème}}}{\underset{\downarrow}{x}}, \ldots, \underset{j^{\text{ème}}}{\underset{\downarrow}{y}}, \ldots, u_p\big) \end{aligned}$$

est une application bilinéaire de E dans F vérifiant

$$\forall x \in E,\ g(x, x) = 0.$$

Montrons :

$$\forall (x, y) \in E^2, g(x, y) = -g(y, x).$$

Pour $(x, y) \in E^2$, la bilinéarité de g nous donne

$$g(x + y, x + y) = g(x, x) + g(x, y) + g(y, x) + g(y, y)$$

ce qui prouve le résultat puisque

$$g(x, x) = g(y, y) = g(x + y, x + y) = 0.$$

Réciproquement, supposons f antisymétrique et soit $i \neq j$ tels que $u_i = u_j$. En échangeant u_i et u_j, la valeur de f change de signe. Comme elle n'est pas modifiée car $u_i = u_j$, cela prouve qu'elle est nulle. □

Exemple 2.6. Sur un espace vectoriel E de dimension 2 muni d'une base (e_1, e_2),
- la forme bilinéaire $(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$ est alternée.
- la forme bilinéaire $(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$ n'est pas alternée.

Proposition 2.7. *Soit f une application p-linéaire alternée de E dans F. Si $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille liée de vecteurs de E, alors $f(u_1, u_2, \dots, u_p) = 0$.*

Démonstration. Comme la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est liée, il existe i tel que u_i soit combinaison linéaire $\sum_{k \neq i} \lambda_k u_k$ des autres vecteurs. Donc

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, \dots, u_p) &= f\Big(u_1, \dots, u_{i-1}, \sum_{k \neq i} \lambda_k u_k, u_{i+1}, \dots, u_p\Big) \\ &= \sum_{k \neq i} \lambda_k f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_k, u_{i+1}, \dots u_p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque chacune des familles $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_k, u_{i+1}, \dots, u_p)$, pour $k \neq i$, contient deux vecteurs égaux et que f est alternée. □

Corollaire 2.8. *Soit f une application p-linéaire alternée de E dans F et soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in E^p$. Le vecteur $f(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est inchangé si l'on ajoute à l'un des u_j une combinaison linéaire des autres.*

Démonstration. Si x est une combinaison linéaire de la famille

$$(u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_p)$$

alors, d'après la proposition précédente

$$f(u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \dots, u_p) = 0$$

et, par p-linéarité de f, on a

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j + x, u_{j+1}, \dots, u_p) =& f(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_p) \\ &+ f(u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \dots, u_p) \\ =& f(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_p) \end{aligned}$$

□

2.3. **Expression d'une application n-linéaire alternée en dimension n.** Dans ce sous-paragraphe E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. La proposition 2.5 implique que si f est n-linéaire alternée, alors pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_n$, et pour tout $u \in E^n$, on a

$$f\left(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}, \dots, u_{\tau(n)}\right) = -f(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

ou encore

$$f\left(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}, \dots, u_{\tau(n)}\right) = \varepsilon(\tau) f(u_1, u_2, \dots, u_n), \tag{2}$$

où ε la signature de $\mathcal{S}_n$.

Proposition 2.9. *Soit f une application n-linéaire alternée de E dans F et σ une permutation de $\mathcal{S}_n$. Alors, pour tout $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$,*

$$f\left(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Démonstration. D'après le theorème 1.4, σ se décompose comme un produit de transpositions,

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k.$$

L'égalité (2) utilisée successivement nous donne

$$\begin{aligned} f\left(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(n)}\right) &= \varepsilon(\tau_1) f\left(u_{\tau_2\cdots\tau_k(1)}, u_{\tau_2\cdots\tau_k(2)}, \ldots, u_{\tau_2\cdots\tau_k(n)}\right) \\ &= \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2) f\left(u_{\tau_3\cdots\tau_k(1)}, u_{\tau_3\cdots\tau_k(2)}, \ldots, u_{\tau_3\cdots\tau_k(n)}\right) \\ &\cdots \\ &= \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\cdots\varepsilon(\tau_k) f(u_1, u_2, \ldots, u_n). \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.8, la signature d'un produit est le produit des signatures, on obtient donc $\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\cdots\varepsilon(\tau_k) = \varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k) = \varepsilon(\sigma)$. D'où la le résultat.

□

Proposition 2.10. *Soit φ une application n-linéaire alternée sur E muni d'une base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont n vecteurs tels que :*

$$\forall j \in [\![1, n]\!], u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i,$$

alors

$$\varphi\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \varphi\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right). \tag{3}$$

Démonstration. On a, d'après la proposition 2.3

$$\begin{aligned} \varphi\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right) &= \sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \cdots\\ 1\leqslant i_n\leqslant n}} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \ldots a_{i_n,n} \varphi\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in [\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \varphi\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right) \end{aligned}$$

où $[\![1, n]\!]^{[\![1,n]\!]}$ est l'ensemble des suites d'éléments dans $[\![1, n]\!]$ et indexées par $[\![1, n]\!]$. Or lorsque $\sigma \in [\![1, n]\!]^{[\![1,n]\!]}$ n'est pas une permutation (pas une bijection), la famille $\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right)$ possède au moins deux vecteurs égaux et qu'alors son image par l'application n-linéaire alternée φ est nulle, donc

$$\varphi\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \varphi\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right).$$

et d'après La proposition 2.9 on a

$$\varphi\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \varphi\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right). \tag{4}$$

□

Proposition 2.11. *L'ensemble des applications p-linéaires alternées de E dans F, est non vide et stable par combinaisons linéaires ; c'est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}\left(E^p, F\right)$.*

En particulier, l'ensemble des formes p-linéaires alternées sur E est un espace vectoriel que l'on note $\bigwedge^{*p}(E)$.

Démonstration. Facile à établir. □

2.4. **Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n.** Nous supposons aussi dans ce sous-paragraphe que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Nous allons d'abord caractériser les formes n-linéaires alternées en dimension 2 et 3 pour avoir une idée sur le cas général.

Cas de la dimension 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base (e_1, e_2) et φ une forme bilinéaire alternée sur E. Si u et v sont deux vecteurs de E s'écrivant

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 \quad \text{et} \quad v = b_1e_1 + b_2e_2$$

la bilinéarité de φ permet d'écrire

$$\begin{aligned}\varphi(u,v) &= \varphi\left(a_1e_1 + a_2e_2, b_1e_1 + b_2e_2\right)\\ &= a_1b_1\varphi\left(e_1,e_1\right) + a_1b_2\varphi\left(e_1,e_2\right) + a_2b_1\varphi\left(e_2,e_1\right) + a_2b_2\varphi\left(e_2,e_2\right).\end{aligned}$$

Comme φ est alternée, on a

$$\varphi\left(e_1,e_1\right) = \varphi\left(e_2,e_2\right) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi\left(e_2,e_1\right) = -\varphi\left(e_1,e_2\right)$$

ce qui donne

$$\varphi(u,v) = \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\varphi\left(e_1,e_2\right)$$

Donc φ est proportionnelle à la forme bilinéaire alternée

$$\begin{array}{rccc}\varphi_0 : & E^2 & \to & \mathbb{K}\\ & (u,v) & \mapsto & a_1b_2 - a_2b_1\end{array} \tag{5}$$

On voit aussi que si l'on impose $\varphi\left(e_1,e_2\right) = 1$, la forme φ est alors égale à φ_0,

Cas de la dimension 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) et φ une forme trilinéaire alternée sur E. Si u_1, u_2 et u_3 sont trois vecteurs de E s'écrivant

$$\forall j \in [\![1,3]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{3} a_{i,j}e_i$$

la trilinéarité de φ permet d'écrire

$$\varphi\left(u_1,u_2,u_3\right) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} a_{k,1}a_{l,2}a_{m,3}\varphi\left(e_k,e_l,e_m\right).$$

Comme φ est alternée, $\varphi\left(e_k,e_l,e_m\right)$ est nul dès que k, l et m ne sont pas distincts deux à deux et

$$\begin{aligned}&\varphi\left(e_1,e_3,e_2\right) = \varphi\left(e_3,e_2,e_1\right) = \varphi\left(e_2,e_1,e_3\right) = -\varphi\left(e_1,e_2,e_3\right)\\ &\varphi\left(e_2,e_3,e_1\right) = -\varphi\left(e_3,e_2,e_1\right) = \varphi\left(e_1,e_2,e_3\right)\\ &\varphi\left(e_3,e_1,e_2\right) = -\varphi\left(e_1,e_3,e_2\right) = \varphi\left(e_1,e_2,e_3\right)\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\varphi\left(u_1,u_2,u_3\right) = \big(&+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}\\ &-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}\big)\varphi\left(e_1,e_2,e_3\right)\end{aligned}$$

Donc φ est proportionnelle à la forme trilinéaire alternée

$$\begin{array}{rccl}\varphi_0 : & E^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ & (u_1,u_2,u_3) & \longmapsto & +a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}\\ & & & +a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}\\ & & & +a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}\end{array} \tag{6}$$

et si l'on impose $\varphi\left(e_1,e_2,e_3\right) = 1$, la forme φ est alors égale à φ_0.

Théorème 2.12. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.*

(a) *Il existe une unique forme n-linéaire alternée φ_0 sur E telle que*

$$\varphi_0 (e_1, e_2, \dots, e_n) = 1.$$

(b) *Toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à φ_0.*

Démonstration. Posons $\forall j \in [\![1, n]\!], u_j = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

Si l'on note φ_0 l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\varphi_0 (u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \tag{7}$$

la formule (3) montre que toute forme n-linéaire alternée φ est proportionnelle à φ_0, et plus précisément que l'on a :

$$\varphi = \varphi (e_1, e_2, \dots, e_n) \varphi_0.$$

En particulier, si $\varphi (e_1, e_2, \dots e_n) = 1$, on a $\varphi = \varphi_0$, ce qui prouve l'unicité. II ne reste plus qu'à montrer que φ_0 est une forme n-linéaire alternée vérifiant $\varphi_0 (e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$.

L'expression de φ_0 prouve que c'est une forme n-linéaire.

Montrons que si, pour $i \neq j$, l'on a $u_i = u_j$, alors $\varphi_0 (u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$.
Soit la transposition $\tau = (i\ j)$ et soit $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations paires. L'ensemble des permutations impaires est alors $\mathcal{A}_n \tau = \{\sigma\tau \mid \sigma \in \mathcal{A}_n\}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \varphi_0 (u_1, u_2, \dots, u_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma\tau(k),k} \end{aligned}$$

Or, on a

$$a_{\sigma\tau(i),i} = a_{\sigma(j),i} = a_{\sigma(j),j} \quad \text{et} \quad a_{\sigma\tau(j),j} = a_{\sigma(i),j} = a_{\sigma(i),i}$$

puisque $u_i = u_j$. Comme $a_{\sigma\tau(k),k} = a_{\sigma(k),k}$ pour $k \notin \{i, j\}$, donc

$$\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma\tau(k),k} = \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}$$

et par suite $\varphi_0 (u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$.

Enfin, vérifions que $\varphi_0 (e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. Par définition de φ_0, on a

$$\varphi_0 (e_1, e_2, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \delta_{\sigma(1),1} \delta_{\sigma(2),2} \dots \delta_{\sigma(n),n}$$

où $(\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice des composantes de $e_1, e_2, \dots, e_n$ dans $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ c'est-à-dire est égale à I_n.

Dans la somme précédente,

- si σ n'est pas l'identité, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq i$ et donc $\delta_{\sigma(i),i} = 0$. Par suite le produit $\varepsilon(\sigma) \delta_{\sigma(1),1} \delta_{\sigma(2),2} \dots \delta_{\sigma(n),n}$ est nul.

- si $\sigma = \mathrm{Id}$, on a $\varepsilon(\sigma) \delta_{\sigma(1),1} \delta_{\sigma(2),2} \dots \delta_{\sigma(n),n} = 1$.

Donc $\varphi_0 (e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$.

□

Corollaire 2.13. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. L'espace $\bigwedge^{*n}(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un espace vectoriel de dimension 1 (engendré par φ_0).*

3. Déterminant

Nous allons donner ici différentes notions de déterminants.

3.1. **Déterminant d'une famille de vecteurs.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition 3.1. *Soient $\mathcal{B}$ une base de E et φ_0 l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\varphi_0(\mathcal{B}) = 1$.*

Le scalaire $\varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ s'appelle **déterminant** *de la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ et se note $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.*

L'application $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de E^n dans $\mathbb{K}$ se note $\det_{\mathcal{B}}$.

Remarque 3.2. Comme $\Lambda^{*n}(E)$ est un espace vectoriel de dimension 1 et que $\det_{\mathcal{B}}$ en est un élément non nul, on en déduit que $\det_{\mathcal{B}}$ est une base de $\Lambda^{*n}(E)$, et donc que toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$.

En particulier, si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, il existe un scalaire λ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

En prenant $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathcal{B}$, on obtient $\lambda = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. D'où la formule, dite de changement de base

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Et pour $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathcal{B}'$, on obtient

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1.$$

3.2. **Déterminant d'un endomorphisme.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Proposition 3.3. *Si f est un endomorphisme de E, il existe un unique scalaire λ, appelé déterminant de f, tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E et pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$, on ait*

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Le déterminant de f se note $\det(f)$ ou $\det f$ et, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a

$$\det f = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})).$$

Démonstration. **Unicité.** Si λ convient et si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors pour $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

et en particulier pour $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathcal{B}$, on obtient

$$\lambda = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$$

ce qui prouve l'unicité.

Existence. Soit $\mathcal{B}_0$ une base fixée de E. L'application

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n))$$

de E^n dans $\mathbb{K}$ est clairement une forme n-linéaire alternée ; elle est donc proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}_0}$. Par suite, il existe un scalaire λ tel que pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$, on ait

$$\det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}_0}(u_1, u_2, \ldots, u_n). \tag{8}$$

Soit maintenant $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. La forme n-linéaire $\det_{\mathcal{B}}$ est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}_0}$ et donc il existe un scalaire α tel que $\det_{\mathcal{B}} = \alpha \det_{\mathcal{B}_0}$. En multipliant la relation (8) par α, on obtient, pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathcal{B}}\left(f\left(u_1\right), f\left(u_2\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right) = \lambda \det_{\mathcal{B}}\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right)$$

ce qui prouve le résultat. □

Remarque 3.4. On retient de la proposition précédente, la formule :
$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathcal{B}}\left(f\left(u_1\right), f\left(u_2\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right) = \det f \det_{\mathcal{B}}\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right). \tag{9}$$

Exemple 3.5. (a) $\det \mathrm{Id}_E = 1$.

(b) Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Étant données une base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de F et une base $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ de G, la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E et

$$\begin{aligned}
\det s &= \det_{\mathcal{B}}\left(s\left(e_1\right), \ldots, s\left(e_n\right)\right)\\
&= \det_{\mathcal{B}}\left(e_1, \ldots, e_p, -e_{p+1}, \ldots, -e_n\right)\\
&= (-1)^{n-p} \det_{\mathcal{B}}\left(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\right)\\
&= (-1)^{n-p}\\
&= (-1)^{\dim G}
\end{aligned}$$

(c) Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, l'endomorphisme de E défini par

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f\left(e_i\right) = e_{\sigma(i)}$$

a pour déterminant

$$\det f = \det_{\mathcal{B}}\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma).$$

3.3. **Déterminant d'une matrice carrée.** On va considérer ici les matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 3.6. *On appelle déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On le note $\det(A)$ ou $\det A$.*

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}^{1 \leqslant i \leqslant n}$, le déterminant de A se note

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Corollaire 3.7. *Le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses vecteurs colonnes.*

Exemple 3.8. (a) D'après (5) on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

(b) D'après (6) on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ -a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \end{array}. \tag{10}$$

Cette formule peut se retrouver à l'aide de la méthode dite de Sarrus (valable uniquement pour les déterminants 3×3) : on recopie les deux premières colonnes de la matrice à droite la troisième et on effectue les produits en diagonale, chacun étant affecté du signe $+$ ou $-$ selon le schéma

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \hline - & - & - & & \end{array}$$

Proposition 3.9. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E dont A est la matrice des composantes dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, alors* $\det A = \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Démonstration. C'est une conséquence de la précédente définition. □

Exemple 3.10. Si D est une matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors

$$\det D = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

En effet D est la matrice de la famille de vecteurs $(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \ldots, \lambda_n e_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et on a donc

$$\begin{aligned} \det D &= \det_{\mathcal{B}}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \ldots, \lambda_n e_n) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i. \end{aligned}$$

Proposition 3.11. *Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. Si A est la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$, alors* $\det f = \det A$.

Démonstration. Ces deux déterminants sont égaux au déterminant de la famille $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}$. □

Proposition 3.12. *Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice carrée d'ordre n, alors*

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}.$$

Démonstration. Soit $u_1, \ldots, u_n$ les vecteurs colonnes de A exprimés dans une base $\mathcal{B}$. D'après la poroposition 3.9, $\det A = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$. Or l'application

$$(u_1, \ldots, u_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$$

est n-linéaire alternée et vérifie $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, donc d'après le théorème 2.12, elle coincide avec l'unique forme φ_0 donnée en (7). □

Remarque 3.13. Vérifions cette formule lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

Pour $n = 2$, le groupe symétrique $\mathcal{S}_2$ est

$$\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, \tau_{1,2}\}$$

où $\tau_{1,2}$ est la transposition $\tau_{1,2} = (1\ 2)$. Donc si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} \det A &= \varepsilon(\mathrm{Id}) a_{\mathrm{Id}(1),1} a_{\mathrm{Id}(2),2} + \varepsilon(\tau_{1,2}) a_{\tau_{1,2}(1),1} a_{\tau_{1,2}(2),2} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \end{aligned}$$

Pour $n = 3$, le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ est

$$\mathcal{S}_3 = \{\mathrm{Id}, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}, c_1, c_2\}$$

où

$$\tau_{1,2} = (1\ 2), \tau_{1,3} = (1\ 3), \tau_{2,3} = (2\ 3), c_1 = (1\ 2\ 3), c_2 = (1\ 3\ 2).$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

et calculons $\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}$

Les permutations Id, c_1 et c_2 sont paires et donnent respectivement les termes $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$, $a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}$, et $a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$.

Les permutations $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$ et $\tau_{2,3}$ sont impaires et donnent respectivement les termes $-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$, $-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$ et $-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}$. Donc

$$\begin{aligned} \det A = {} & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ & - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}. \end{aligned}$$

C'est l'expression que nous avons trouvé en (10).

4. Propriétés du déterminant

Dans toute cette section E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Théorème 4.1. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(*a*) *$(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E,*
(*b*) *$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$.*

Démonstration. (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Si $\mathcal{B}' = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, l'application $\det_{\mathcal{B}'}$ est un élément de $\bigwedge^{*n}(E)$ (qui est de dimension 1), donc proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n,\ \det_{\mathcal{B}'}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

et, puisque $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 1$, on en déduit :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0.$$

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*). En utilisant la proposition 2.7, on obtient la contraposée, à savoir : si la famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n'est pas une base de E, alors elle est liée et $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$.

□

Proposition 4.2. *Soient f et g deux endomorphismes de E et λ un scalaire. On a*
(*a*) *$\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$,*
(*b*) *$\det(f \circ g) = \det f \det g$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. On a

$$\begin{aligned} \det(\lambda f) &= \det_{\mathcal{B}}\left(\lambda f\left(e_1\right), \lambda f\left(e_2\right), \ldots, \lambda f\left(e_n\right)\right) \\ &= \lambda^n \det_{\mathcal{B}}\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), \ldots, f\left(e_n\right)\right) \\ &= \lambda^n \det f, \\ \det(f \circ g) &= \det_{\mathcal{B}}\left(f \circ g\left(e_1\right), f \circ g\left(e_2\right), \ldots, f \circ g\left(e_n\right)\right) \\ &= \det_{\mathcal{B}}\left(f\left(g\left(e_1\right)\right), f\left(g\left(e_2\right)\right), \ldots, f\left(g\left(e_n\right)\right)\right) \\ &= \det f \det_{\mathcal{B}}\left(g\left(e_1\right), g\left(e_2\right), \ldots, g\left(e_n\right)\right) \\ &= \det f \det g. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.3. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un scalaire. On a*

(*a*) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$,

(*b*) $\det(AB) = \det A \det B$.

Démonstration. (a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. La matrice de λf par rapport à la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est λA et l'on a

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda f) = \lambda^n \det f = \lambda^n \det A.$$

(b) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à B. La matrice de $f \circ g$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est AB et l'on a

$$\det(AB) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$

□

Proposition 4.4. (*a*) *Un endomorphisme f de E est bijectif si, et seulement si,* $\det f \neq 0$ *et on a alors*

$$\det\left(f^{-1}\right) = \frac{1}{\det f}.$$

(*b*) *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si,* $\det A \neq 0$ *et on a alors*

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}.$$

Démonstration. (a) Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. On a :

$$\det f = \det_{\mathcal{B}}\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), \ldots, f\left(e_n\right)\right).$$

Donc, d'après le théorème 4.1, le scalaire $\det f$ est non nul si, et seulement si, $\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), \ldots, f\left(e_n\right)\right)$ est une base de E c'est-à-dire si, et seulement si, f est un automorphisme de E. La proposition 4.2 permet alors d'écrire :

$$\det f \det\left(f^{-1}\right) = \det \mathrm{Id}_E = 1$$

et donc $\det\left(f^{-1}\right) = \frac{1}{\det f}$.

(b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On sait que $\det A = \det f$ et que A est inversible si, et seulement si, f est bijectif. Grâce au résultat précédent, on en déduit que A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$. La proposition 4.3 permet alors d'écrire

$$\det A \det\left(A^{-1}\right) = \det I_n = 1$$

et donc $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$.

□

Corollaire 4.5. (*a*) *Soient f et g deux endomorphismes de E tels que g est inversible, alors*

$$\det(g \circ f \circ g^{-1}) = \det f.$$

(*b*) *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec B est inversible, alors*

$$\det(BAB^{-1}) = \det A.$$

Proposition 4.6. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A^\top$ sa transposée. Alors*

$$\det A = \det A^\top.$$

Démonstration. Les applications

$$(C_1, C_2, \dots, C_n) \mapsto \det(C_1 \dots C_n) \;\text{ et }\; (C_1, C_2, \dots, C_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} C_1^\top \\ \vdots \\ C_n^\top \end{pmatrix}$$

sont n-linéaires alternées sur $\mathbb{K}^n$. Elles sont donc proportionnelles, ce qui prouve l'existence d'un scalaire λ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\; \det A = \lambda \det A^\top.$$

En prenant $A = I_n$, on en déduit $\lambda = 1$ et donc le résultat. □

Corollaire 4.7. *Le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses lignes.*

5. Méthodes de calcul du déterminant d'une matrice

5.1. **Déterminant d'une matrice et opérations élémentaires.** Puisque le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée des colonnes ou des lignes de cette matrice, les propriétés des formes n-linéaires alternées permettent d'énoncer les règles suivantes.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$ et de lignes $L_1, \dots, L_n$ et notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Nous donnerons les formules pour les colonnes, mais par invariance du déterminant par transposition, ces formules sont valables aussi pour les lignes.

Ces règles de transformation d'un déterminant permettent :

- soit de prouver qu'il est nul,
- soit d'introduire dans une colonne (respectivement une ligne) un maximum de 0 afin d'utiliser avec profit les résultats qui vont suivre.

Proposition 5.1 (Déterminant d'une matrice et opérations élémentaires)**.** *On a*

— *Un déterminant qui a deux colonnes (respectivement deux lignes) identiques est nul,*

$$\det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_i, \cdots, C_n) = 0.$$

— *L'échange de deux colonnes d'un déterminant (respectivement deux lignes) multiplie le déterminant par -1,*

$$\det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_j, \cdots, C_n) = -\det(C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_i, \cdots, C_n).$$

— *Un déterminant dont une colonne (respectivement une ligne) est combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement des autres lignes) est nul,*

$$\det(C_1, \cdots, \underset{\substack{\downarrow \\ i^{\text{ème}}place}}{\sum_{k \neq i} \lambda_k C_k}, \cdots, C_n) = 0$$

— *Un déterminant dont une colonne (respectivement une ligne) est formée de 0 est nul,*

$$\det(C_1, \cdots, \mathbf{0}, \cdots, C_n) = 0$$

— *La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une colonne (respectivement à une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement des autres lignes),*

$$\det(C_1, \cdots, C_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k, \cdots, C_n) = \det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_n).$$

— *Si l'on multiplie une colonne d'un déterminant (respectivement une ligne) par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ,*

$$\det(C_1, \cdots, \lambda C_i, \cdots, C_n) = \lambda \det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_n).$$

— *Si l'on multiplie par λ tous les coefficients d'une matrice $n \times n$, le déterminant est multiplié par λ^n,*

$$\det(\lambda C_1, \cdots, \lambda C_i, \cdots, \lambda C_n) = \lambda^n \det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_n).$$

Exemple 5.2. (1) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

puisque la troisième colonne est nulle.

(2) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

puisque la deuxième ligne est est nulle.

(1) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

puisque la matrice a deux colonnes proportionnelles.

(2) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

puisque la troisième ligne est la somme des deux premières.

5.2. **Développement d'un déterminant suivant une rangée.** On suppose dans cette partie $n \geqslant 2$.

Proposition 5.3. *Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est une matrice carrée de la forme*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \cdots & * & a_{n,n} \end{array}\right)$$

alors $\det A = a_{n,n} \det A'$.

Démonstration. Le résultat est évident pour une matrice 2×2 ou 3×3.

On a par définition

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

et comme par hypothèse

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \quad \sigma(n) \neq n \Longrightarrow a_{\sigma(n),n} = 0$$

la relation précédente s'écrit

$$\det A = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n-1),n-1} a_{n,n}.$$

Or la restriction à $[\![1, n-1]\!]$ de toute permutation σ vérifiant $\sigma(n) = n$ est une permutation s de $[\![1, n-1]\!]$. Réciproquement, en prolongeant une permutation $s \in \mathcal{S}_{n-1}$ par $s(n) = n$, on obtient une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$. De plus, $\varepsilon(s) = \varepsilon(\sigma)$ puisqu'une décomposition de s en produit de k transpositions donne également une décomposition de σ en k transpositions. On a alors

$$\det A = \sum_{s \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(s) a_{s(1),1} a_{s(2),2} \dots a_{s(n-1),n-1} a_{n,n} = a_{n,n} \det A'.$$

□

De manière analogue on peut aussi montrer le résultat suivant.

Proposition 5.4. *Si* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *est une matrice carrée de la forme*

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

alors $\det A = a_{1,1} \det A'$.

Corollaire 5.5. *Si* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *est une matrice triangulaire de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, alors*

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Démonstration. Comme le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée, il suffit de démontrer le résultat pour les matrices triangulaires inférieures.

Si A est triangulaire inférieure, la proposition 5.3 nous donne

$$\det A = a_{n,n} \det A'$$

où A' est la matrice A privée de sa dernière ligne et de sa dernière colonne (qui est aussi triangulaire inférieure). Le résultat est alors immédiat par récurrence.

□

Exemple 5.6. Soient a, b et c trois scalaires et considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \quad \text{mise en facteur dans } L_2 \text{ et } L_3 \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \\
&= (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{d'après le corollaire.}
\end{aligned}$$

Définition 5.7. *Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit i et j des entiers de $[\![1,n]\!]$. On appelle*

(*a*) **mineur** *de $a_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A,*

(*b*) **cofacteur** *de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.*

Théorème 5.8 (Développement suivant une colonne). *Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors*

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}. \tag{11}$$

Démonstration. Désignons par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et par $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Pour tout entier $j \in [\![1,n]\!]$, on a $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\det A &= \det_{\mathcal{B}}\left(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_{\mathcal{B}}\left(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n\right)
\end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned}
D_{i,j} &= \det_{\mathcal{B}}\left(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n\right) \\
&= \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}_{[n]}
\end{aligned}$$

On peut opérer sur $D_{i,j}$ une suite de $n-j$ échanges de colonnes pour amener la $j$ème en dernière position, puis une suite de $n-i$ échanges de lignes pour amener la $i$ème en dernière position. Le déterminant est alors multiplié par $(-1)^{n-j}(-1)^{n-i} = (-1)^{i+j}$ et l'on a

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

ce qui entraîne, d'après la proposition 5.3 que $D_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ et donc

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

□

En appliquant ce résultat à la transposée, on obtient,

Théorème 5.9 (Développement suivant une ligne)**.** *Si* $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

Exemple 5.10. (a) Pour un déterminant 3×3, on a ainsi (développement par rapport à la première ligne) :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} &= a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} \\ &\qquad - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \\ &\qquad\qquad + a_{1,3}a_{2,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \end{aligned}$$

(b) Pour un déterminant 4×4, on a de même (développement par rapport à la première ligne) :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \\ &= + a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,4} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

(c) Soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En le développant par rapport à la troisième colonne on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 4,$$

et en le développant par rapport à troisième ligne on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 3 & \alpha \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 4.$$

(d) Pour calculer un déterminant on peut aussi combiner des opérations élémentaires sur les lignes à des opérations sur les colonnes. En voici un exemple.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-2) \times (-2) \times (-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -8 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -8 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -8
\end{aligned}$$

Exemple 5.11 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soient $n \geq 2$ un entier et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ des scalaires.

Le déterminant d'ordre $n \times n$ suivant

$$V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

est appelé **déterminant de Vandermonde**.

Montrons que

$$V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Pour $n = 2$, on a $V(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$.
Le calcul de $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ se fait par récurrence sur $n \geq 2$. En retranchant, pour $i = n, n-1, \cdots, 2$ à la ligne i la ligne $i-1$ multipliée par α_1 (c-à-d. changer L_i en $L_i - \alpha_1 L_{i-1}$), on obtient

$$V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \cdots & \alpha_n - \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant par rapport à la première colonne on a

$$V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\begin{vmatrix} \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1 & \cdots & \alpha_n-\alpha_1 \\ \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) & \cdots & \alpha_n(\alpha_n-\alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3-\alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n-\alpha_1) \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

et en factorisant par $\alpha_2-\alpha_1$ à la première colonne, par $\alpha_3-\alpha_1$ à la deuxième colonne, $\cdots$, par $\alpha_n-\alpha_1$ à la dernière colonne on trouve

$$\begin{aligned} V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) &= \left(\prod_{k=2}^{n}(\alpha_k-\alpha_1)\right)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2^{n-2} & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &= \left(\prod_{k=2}^{n}(\alpha_k-\alpha_1)\right)V(\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \end{aligned}$$

et par hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned} V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) &= \prod_{k=2}^{n}(\alpha_k-\alpha_1)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}^{n}(\alpha_j-\alpha_i) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}(\alpha_j-\alpha_i). \end{aligned}$$

On déduit que $V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\neq 0$ si, et seulement si, les α_i sont deux à deux distints.

5.3. **Déterminants par blocs.** Le calcul d'un déterminant peut aussi se faire par bloc (lorsque la matrice s'y prête bien).

Proposition 5.12. *Soit A une matrice $p\times p$, B une matrice $q\times q$ et C une matrice $p\times q$. Alors le déterminant de la matrice $n\times n$,*

$$\begin{pmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

où $n=p+q$, est donné par

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}=\det A\det B.$$

Démonstration. Posons

$$D=\begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{vmatrix}$$

Considérons D comme une fonction f des vecteurs colonnes de A (on fixe les autres colonnes). On peut sans difficulté affirmer que dans ce cas D est une forme p-linéaire sur $\mathbb{K}^p$. Par conséquent,

$$D=f(A)=\det(A)f(e_1,\ldots,e_p)$$

où $(e_1,\ldots,e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Ainsi

$$D=\det(A)\cdot\begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{vmatrix}.$$

On effectue un raisonnement semblable sur le déterminant de la transposée de la matrice $\begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Donc

$$D = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \begin{vmatrix} I_p & 0_q \\ C^\top & I_q \end{vmatrix}$$

et comme $\begin{vmatrix} I_p & 0_q \\ C^\top & I_q \end{vmatrix} = 1$, on a le résultat. □

Exemple 5.13. On a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi & \ln 2 & 17 \\ 3 & 4 & e & \ln 7 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \pi^2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \times [2 \times (-3)] = 12 \end{aligned}$$

Corollaire 5.14. *Si A est une matrice carrée $n \times n$, diagonale par blocs, de la forme*

$$A \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \boxed{A_2} & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

où les A_i sont des matrices carrées quelconques, alors

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_k.$$

6. Applications du déterminant

6.1. **Formule de la comatrice.** Nous allons voir ici comment on peut utiliser le déterminant d'une matrice inversible pour calculer son inverse.

Définition 6.1. *Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle* **comatrice** *de A, notée* $\mathrm{Com}(A)$ *ou* $\mathrm{Com}\,A$*, la matrice des cofacteurs de A, c'est-à dire la matrice* $\mathrm{Com}\,A = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ *où $b_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ est le cofacteur de $a_{i,j}$ dans A.*

Proposition 6.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors*

$$A\,(\mathrm{Com}\,A)^\top = (\mathrm{Com}\,A)^\top A = (\det A) I_n.$$

Démonstration. Posons $B = \mathrm{Com}\,A$ et $AB^\top = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Donc pour tous entiers i et k dans $[\![1, n]\!]$, on a

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} \Delta_{k,j} a_{i,j}$$

- Si $k = i$ la dernière somme ci-dessus représente le développement du déterminant de A suivant la i ème ligne, ce qui implique $c_{i,i} = \det A$.

- Si $k \neq i$, soit $A' = \left(a'_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice obtenue à partir de A en recopiant la $i^{\text{ème}}$ ligne dans la $k^{\text{ème}}$ ligne.

Comme A' admet deux lignes identiques, son déterminant est nul et en développant ce déterminant suivant sa $k^{\text{ème}}$ ligne, on a

$$0 = \det A' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} \Delta'_{k,j} a'_{k,j}.$$

Par construction, on a $a'_{k,j} = a_{i,j}$ et, puisque les lignes de A et de A' autres que les $k^{\text{èmes}}$ sont identiques, on a $\Delta'_{k,j} = \Delta_{k,j}$. Par suite la relation précédente devient

$$0 = \det A' = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{j+k} \Delta_{k,j} = c_{i,k}.$$

On a donc l'égalité $AB^\top = (\det A) I_n$.

On démontre de manière analogue, en utilisant des développements par rapport aux colonnes, la relation $B^\top A = (\det A) I_n$. □

Corollaire 6.3 (Formule de la comatrice)**.** *Si A est une matrice inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\mathrm{Com} A)^\top$$

Exemple 6.4. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la comatrice de A vaut $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Si de plus A est inversible, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

À l'exception de ce cas des matrices 2×2 on utilise rarement la formule précédente pour inverser une matrice. La plupart du temps, on préfère utiliser la méthode du pivot de Gauss.

6.2. **Systèmes de Cramer.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

On considère le système d'équations linéaires à n lignes et n colonnes suivant

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n & = b_n \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

En notant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),$$

$(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathcal{S})$ dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si : $AX = B$. Ainsi, la résolution de $(\mathcal{S})$ se ramène à celle de l'équation matricielle $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le système linéaire $(\mathcal{S})$ est dit **de Cramer** si et seulement si la matrice A est inversible.

Proposition 6.5. *Si $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$, l'unique solution de $(\mathcal{S})$ est le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{,i+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

où A_i est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa i^{e} colonne par B.

Démonstration. Soit $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice A. Si $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer, l'unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $(\mathcal{S})$ vérifie la relation

$$\sum_{j=1}^{n} x_j C_j = B$$

ce qui implique que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \ldots, C_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n)$$

Comme $\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n)$ est nul dès que $j \neq i$, on obtient

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \ \det A_i = x_i \det A$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple 6.6. Pour $n = 2$, le système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

est un système de Cramer si, et seulement si, on a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

et la solution est alors

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Exemple 6.7. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. On se propose de résoudre

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ x + cy + c^2 z = c^3 \end{cases}$$

La matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

son déterminant est un déterminant de Vandermonde et il est égal à $\det A = (c-a)(c-b)(b-a) \neq 0$. Donc le système est de Cramer. Calculons la solution unique

$$x = \frac{\det A_1}{\det A},\ y = \frac{\det A_2}{\det A},\ z = \frac{\det A_3}{\det A},$$

On a

$$\begin{aligned}\det A_1 &= \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \qquad \text{deux permutations sur les colonnes} \\ &= abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\ &= abc \det A\end{aligned}$$

Donc

$$x = abc$$

$$\begin{aligned}\det A_2 &= \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 0 & b^3 - a^3 & b^2 - a^2 \\ 0 & c^3 - a^3 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b^3 - a^3 & b^2 - a^2 \\ c^3 - a^3 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b^2 + ab + a^2 & b + a \\ c^2 + ca + a^2 & a + c \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)\big(bc(b-c) + a(b-c)(b+c)\big) \\ &= (b-a)(c-a)(b-c)(ab+ac+bc) \\ &= -(ab+ac+bc)\det A\end{aligned}$$

Donc

$$y = -(ab+ac+bc).$$

Un calcul analogue montre que $\det A_3 = (a+b+c)\det A$, donc

$$z = a+b+c.$$

À l'exception de ce cas des matrices 2×2 (ou 3×3 à paramètres) on utilise rarement ces formules pour résoudre un système linéaire. La plupart du temps, on préfère utiliser la méthode du pivot de Gauss.

6.3. **Rang d'une matrice.** Commençons par quelques rappels sur le rang.

- le rang d'une famille finie $(v_1, \cdots, v_p)$ de vecteurs de E est défini par

$$\mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p) = \dim \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p),$$

- le rang d'une application linéaire $f\colon E \to F$ est défini par

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f),$$

- le rang d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est défini par

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(C_1, \ldots, C_p\right),$$

où $C_1, \ldots, C_p$ sont les colonnes de A.

Ces notions sont reliées entre elles :

- le rang d'une famille finie $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est aussi le rang de la matrice dont les colonnes sont formées par les composantes des éléments de $\mathcal{F}$ dans une base de E,
- le rang de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E, le rang de la famille $(f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, et est aussi le rang de n'importe quelle matrice représentant f.
- le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de n'importe quelle application linéaire représentée par A.

Rappelons enfin le théorème du rang

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \quad \mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Définition 6.8. *Soient* $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et* $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Pour tout entiers non nuls* $r \leqslant n$, $s \leqslant p$, *on appelle* **matrice extraite** (*ou* **sous-matrice**) *de* A *de taille* $r \times s$, *la matrice* $(a_{i_k,j_l})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ 1 \leqslant l \leqslant s}}$ *de* $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ *obtenue à partir* A *par utilisation des lignes* $i_1, \ldots, i_k$ *et des colonnes* $j_1, \ldots, j_b$ *où*

$$\begin{cases} (i_1, \ldots, i_r) \in \{1, \ldots, n\}^r \text{ tel que } i_1 < \ldots < i_r \\ (j_1, \ldots, j_s) \in \{1, \ldots, p\}^s \text{ tel que } j_1 < \ldots < j_s \end{cases}$$

Exemple 6.9. La matrice

$$\begin{pmatrix} a & c & d \\ a'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

est une matrice extraite de

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

par utilisation des lignes $1, 3$ et des colonnes $1, 3, 4$.

Théorème 6.10. *Pour toute matrice* A *de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *le rang de* A *est égal à l'ordre maximum des sous-matrices carrées inversibles extraites de* A.
Autrement dit, $\mathrm{rg}(A) = r$ *si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :*
(i) *Il existe une matrice carrée extraite de* A *de taille* $r \times r$ *de déterminant non nul,*
(ii) *pour tout* $s > r$, *toute matrice carrée extraite de* A *de taille* $s \times s$ *est de déterminant nul.*

Démonstration. Notons $r = \mathrm{rg}(A)$, et s l'ordre maximum des sous-matrices carrées inversibles extraites de A. Il s'agit donc de montrer que $r = s$.

Soit B une sous-matrice carrée de A de taille $\alpha \times \alpha$, et supposons $\alpha > r$. Notons $i_1, \ldots, i_\alpha$ ($i_1 < \ldots < i_\alpha$) les numéros des lignes de A utilisées pour extraire B, $v_1, \ldots, v_\alpha \in \mathcal{M}_{\alpha,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de B et $V_1, \ldots, V_\alpha \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de A utilisées pour extraire B. Puisque $\alpha > r$, la famille $(V_1, \ldots, V_\alpha)$ est liée. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha) \in \mathbb{K}^\alpha - \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i V_i = \mathbf{0}$. Il en résulte, en ne prenant que les lignes numéros $i_1, \ldots, i_\alpha$: $\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i v_i = \mathbf{0}$, et donc B n'est pas inversible. Ceci montre que $r \geqslant s$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$, $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire représentée par A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Puisque $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = r$, il existe $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, p\}$ tels que $i_1 < \ldots < i_r$ et $(f(e_{i_1}), \ldots, f(e_{i_r}))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. En permutant les colonnes de A (ce qui ne change ni r ni s), on peut se ramener à supposer que $i_1 = 1, \ldots, i_r = r$.
D'après le théorème de la base incomplète, il existe $j_{r+1}, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, n\}$ tels que la famille $\mathcal{F} = \left(f(e_1), \ldots, f(e_r), u_{j_{r+1}}, \ldots, u_{j_n}\right)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$. Ainsi $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) \neq 0$,

et

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & 1 \\ \vdots & & \vdots & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,r} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

où, pour tout k de $\{1, \dots, n-r\}$, la colonne numéro $r+k$ est formée de zéros, sauf un terme égal à 1, situé à la ligne j_{r+k}.

En développant ce déterminant par rapport à la dernière colonne, de façon itérée, on obtient, en notant $j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\}$ tels que $j_1 < \dots < j_r$ et $\{j_1, \dots, j_r\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{j_{r+1}, \dots, j_n\}$,

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \pm \begin{pmatrix} a_{j_1,1} & \cdots & a_{j_1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_r,1} & \cdots & a_{j_r,r} \end{pmatrix}.$$

On fait ainsi apparaitre une matrice carrée d'ordre r, inversible, extraite de A. Ceci montre que $r \leqslant s$. $\square$

Exemple 6.11. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

et déterminons son rang. On a

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Donc tous les déterminants de matrices 3×3 extraites de A sont nuls, d'où $\mathrm{rg}(A) < 3$.

Pour montrer que A est de rang 2, il suffit de trouver une matrice 2×2 extraite de déterminant non nul. Or

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

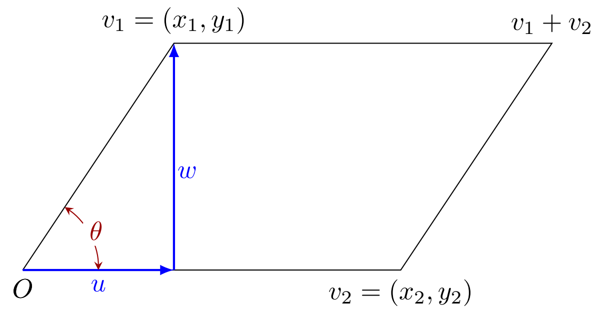
donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

7. Interpretation géométrique du déterminant

Le déterminant d'une matrice $n \times n$ peut être interprété géométriquement comme le volume (dans l'espace euclidien $\mathbb{K}^n$). du parallélogramme dont les sommet sont les vecteurs colonnes (ou lignes) de A.

Nous allons expliquer cette connection entre déterminant et l'aire lorsque $n = 2$ mais le raisonnement que nous allons faire est valable en toute dimension.

Soit Toute matrice $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ de vecteurs lignes $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ peut être représentée par un parallélogramme de sommets O, v_1, v_2, $v_1 + v_2$



et inversement. L'aire de ce parallélogramme est

$$\mathcal{A} = \text{ base } \times \text{ hauteur } = \|v_1\| \times \|v_2\| \times |\sin\theta|,$$

où θ est l'angle entre les vecteurs v_1 et v_2. Par la formule de cosinus

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|\,\|v_2\|}$$

on obtient

$$\mathcal{A}^2 = \|v_1\|^2\,\|v_2\|^2(1-\cos^2\theta) = \langle v_1, v_1\rangle\langle v_2, v_2\rangle - \langle v_1, v_2\rangle\langle v_2, v_1\rangle.$$

On reconnait alors au second membre de la précédente égalité, le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle \end{pmatrix} = AA^\top$$

Il en découle alors que $\mathcal{A}^2 = \det AA^\top = (\det A)^2$, et par conséquent

$$\mathcal{A} = |\det A|.$$

Le théorème suivant sera admis

Théorème 7.1. *Le volume du parallélépipède de $\mathbb{R}^n$ dont les sommets sont les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ est égale à $|\det A|$ où A est la matrice dont les vecteurs lignes sont $v_1, \cdots, v_n$.*

Références

[1] C. Deschamps, A. Warusfel. Mathématiques 1re année. Collection Ramis, Dunod 1999.
[2] K. Koufany. Algèbre linéaire 1. http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Alg-Lin-S2/.
[3] K. Koufany. Algèbre 2. http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Algebre2/.

URL: `http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Alg-Lin2/`