Algèbre linéaire 2

Examen partiel du 9 novembre 2023

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel.

(1) Calculer $\det A$.

(2) Déterminer le rang de A selon les valeurs de a..

(3) On note $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_3)$ le polynôme caractéristique de A. Montrer que $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$ où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des nombres réels à determiner.

(4) Montrer que A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes si, et seulement si, $a \neq 1, a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$.

(5) On suppose $a \neq 1, a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(6) On suppose $a = 1$. Donner dans ce cas $\chi_A(\lambda)$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. Montrer que la matrice A est diagonalisable, puis trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

(7) On suppose $a = -2$. Donner dans ce cas $\chi_A(\lambda)$ et les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(8) On suppose $a = -\frac{1}{2}$. Donner dans ce cas $\chi_A(\lambda)$ et les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. Soient a, b et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels. On pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]} .$$

(1) Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x, c-à-d. s'écrit $\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$, où α et β sont des nombres réels. (Indication : Retirer la première colonne aux suivantes, puis développer selon la première colonne).

(2) On suppose $a \neq b$. Calculer $\Delta_n(-a)$ et $\Delta_n(-b)$. En déduire $\Delta_n(x)$. Ecrire le résultat à l'aide de la fonction polynomiale $P(t) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t)$.

(3) Déduire de (2) la valeur du déterminant

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{vmatrix}_{[n]} .$$

(4) Déduire de (3) que le déterminant

$$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ a & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & \lambda_n \end{vmatrix}_{[n]}$$

vaut $P(a) - aP'(a)$. (Indication : faire apparaitre un taux d'accroissement dans l'expression de D_1).

(5) Déduire de (4) la valeur explicite du déterminant

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]} .$$