Algèbre linéaire 2
Examen partiel du 9 novembre 2023

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel.

(1) Calculer $\det A$.

(2) Déterminer le rang de A selon les valeurs de a..

(3) On note $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ le polynôme caractéristique de A. Montrer que $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$ où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des nombres réels à determiner.

(4) Montrer que A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes si, et seulement si, $a \neq 1, a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$.

(5) On suppose $a \neq 1, a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(6) On suppose $a = 1$. Donner dans ce cas $\chi_A(\lambda)$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. Montrer que la matrice A est diagonalisable, puis trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

(7) On suppose $a = -2$. Donner dans ce cas $\chi_A(\lambda)$ et les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(8) On suppose $a = -\frac{1}{2}$. Donner dans ce cas $\chi_A(\lambda)$ et les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution de l'exercice 1. (1) On a

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = a(a+1)$$

on trouve donc $\det A = a(a+1)$.

(2) Etude du rang de A.

— *Premier cas : $a \neq 0$ et $a \neq -1$.*
Dans ce cas $\det A \neq 0$ donc A est inversible et par conséquent $\operatorname{rg} A = 3$.

— *Deuxième cas : $a = 0$.*
Dans ce cas,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc clairement $\operatorname{rg} A = 2$.

— *Troisième cas : $a = -1$.*
Dans ce cas,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\operatorname{rg} A \geqslant 2$ car les deux premières colonnes de A sont non colinéaires. Or $\det A = 0$ donc $\operatorname{rg} A \leqslant 2$. On en déduit que $\operatorname{rg} A = 2$.

(3) Notons χ_A le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & a & 1 \\ a & -\lambda & 1 \\ a & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

En ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement :

$$\det(\lambda I_n - A) = (-\lambda + a + 1) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda + a - 1) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & -\lambda - a & 0 \\ 0 & 1 - a & -\lambda - 1 \end{vmatrix}$$

Donc, en développant par rapport à la première colonne on trouve

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1).$$

Les racines de χ_A sont $a + 1$,$-a$ et -1. Ce sont les valeurs propres de A.

(4) A admet des valeurs propres deux à deux distinctes, si et seulement si, $a + 1 \neq -a$, $a + 1 \neq -1$ et $-a \neq -1$. Or

$$a + 1 = -a \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$
$$a + 1 = -1 \Longleftrightarrow a = -2.$$
$$-a = -1 \Longleftrightarrow a = 1.$$

par conséquent A admet des valeurs propres deux à deux distinctes, si et seulement si, $a \neq 1, a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$.

(5) On suppose $a \neq 1, a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$. Alors A est une matrice 3×3 qui admet trois valeurs propres distinctes, par conséquent A est diagonalisable.

(6) On suppose $a = 1$. Dans ce cas

$$\chi_A(X) = (X+1)^2(X-2).$$

2 est une valeur propre simple et -1 est une valeurs propre double. La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_{-1}(A) = 2$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}\,(A + I_3) = 1$. Or

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}\,(A + I_3) = 1$ et par suite A est diagonalisable. On va maintenant la diagonaliser. Pour cela on va chercher une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.

Après calcul, on trouve les sous-espaces propres pour la valeurs propres 2 et -1,

$$E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(v_1)$$
$$E_{-1}(A) = \mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$$

où

$$v_1 = (1, 1, 1)^\top,\ v_2 = (1, 0, -1)^\top,\ v_2 = (0, 1, -1)^\top.$$

Ces trois vecteurs forment une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et la matrice dans cette base de l'endomorphisme naturellement associé à A est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La formule de diagonalisation de A s'écrit alors $A = PDP^{-1}$.

(7) On suppose $a = -2$. Dans ce cas

$$\chi_A(X) = (X+1)^2(X-2).$$

Là aussi -1 est une valeur propre double et 2 est une valeur propre simple. Or

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit clairement que $\mathrm{rg}\,(A + I_3) = 2$. Donc $\dim E_{-1}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A + I) = 1$. Mais la multiplicité de la valeur propre -1 est 2, donc A n'est pas diagonalisable.

(8) On suppose $a = -\frac{1}{2}$. Dans ce cas

$$\chi_A = (X - \frac{1}{2})^2(X+1)$$

Ici $\frac{1}{2}$ est une valeur propre double et -1 est une valeur propre simple. Or

$$A - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Là aussi, on voit clairement que $\mathrm{rg}\left(A - \frac{1}{2}I_3\right) = 2$. Donc $\dim E_{1/2}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A - \frac{1}{2}I) = 1$. Mais la multiplicité de la valeur propre $\frac{1}{2}$ est 2, donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 2. Soient a, b et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels. On pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \ldots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}.$$

(1) Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x, c-à-d. s'écrit $\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$, où α et β sont des nombres réels. (Indication : Retirer la première colonne aux suivantes, puis développer selon la première colonne).

(2) On suppose $a \neq b$. Calculer $\Delta_n(-a)$ et $\Delta_n(-b)$. En déduire $\Delta_n(x)$. Ecrire le résultat à l'aide de la fonction polynomiale $P(t) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - t)$.

(3) Déduire de (2) la valeur du déterminant

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \ldots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{vmatrix}_{[n]}.$$

(4) Déduire de (3) que le déterminant

$$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ a & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & \lambda_n \end{vmatrix}_{[n]}$$

vaut $P(a) - aP'(a)$. (Indication : faire apparaitre un taux d'accroissement dans l'expression de D_1).

(5) Déduire de (4) la valeur explicite du déterminant

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution de l'exercice 2. (1) En retirant la première colonne aux suivantes

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a-\lambda_1 & \cdots & a-\lambda_1 \\ b+x & \lambda_2 - b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ b+x & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Puis en développant selon la première colonne on obtient une expression de la forme

$$\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$$

où α et β sont des constantes. En effet, puisque l'application déterminant est une forme multi-linéaire, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne on a

$$\begin{aligned}\Delta_n(x) &= \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a-\lambda_1 & \cdots & a-\lambda_1 \\ b+x & \lambda_2 - b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ b+x & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= \begin{vmatrix} x & a-\lambda_1 & \cdots & a-\lambda_1 \\ x & \lambda_2 - b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ x & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & a-\lambda_1 & \cdots & a-\lambda_1 \\ b & \lambda_2 - b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ b & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\Delta_n(x) &= x\begin{vmatrix} 1 & a-\lambda_1 & \cdots & a-\lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 - b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & a-\lambda_1 & \cdots & a-\lambda_1 \\ b & \lambda_2 - b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ b & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= x\alpha + \beta\end{aligned}$$

(2) Par déterminant triangulaire

$$\Delta_n(-a) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) = P(a) \text{ et } \Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b) = P(b).$$

Or On a

$$\begin{cases} \Delta_n(-a) = -a\alpha + \beta \\ \Delta_n(-b) = -b\alpha + \beta \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a} = \frac{P(a) - P(b)}{b-a} \\ \beta &= \frac{b\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - a\prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a} = \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Delta_n(x) &= \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a}x + \frac{b\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - a\prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a} \\ &= \frac{P(a) - P(b)}{b-a}x + \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a}.\end{aligned}$$

(3) Le déterminant D_1 n'est autre que $\Delta_n(0) = \beta$. Donc

$$D_1 = \frac{b\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - a\prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a} = \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a}.$$

(4) Le déterminant D_2 n'est autre que D_1 dans lequel on fait tendre b vers a. On a

$$D_1 = \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a} = P(a) - a\frac{P(b) - P(a)}{b-a}.$$

Si on fait tendre b vers a, alors $\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$ tend vers $P'(a)$. La valeur de D_1 quand $b = a$ est donc $P(a) - aP'(a)$. Ainsi

$$D_2 = P(a) - aP'(a) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) + a\sum_{k=1}^n \prod_{i=1, i\neq k}^n (\lambda_i - a).$$

(5) Notons D_2' le déterminant D_2 dans lequel $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$, donc

$$D_2' = (\lambda - a)^n + an\,(\lambda - a)^{n-1} = (\lambda - a)^{n-1}\,(\lambda + a(n-1)).$$

Ensuite, D_3 corresponds à D_2' dans lequel $\lambda = 2$ et $a = 1$, donc

$$D_3 = (2-1)^{n-1}(2+n-1) = n+1.$$