Examen Partiel : Algèbre linéaire 2

9 Novembre 2022 – durée 2h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer la matrice $B = TA$ et calculer le déterminant de B.

(2) Déduire de la question précédente le déterminant de A.

(3) Déduire de la question précédente le déterminant de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & -6 & 40 \end{pmatrix}.$$

Un calcul directe de $\det(C)$ n'est pas accepté.

Exercice 2. Soient n un entier naturel et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, c'est-à-dire vérifiant $A^\top A = I_n$ (où $A^\top$ est la matrice transposée de A).

(1) Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

(2) On suppose désormais que $\det(A) = 1$ et que n est impair. Montrer que la matrice $A - I_n$ n'est pas inversible.
Indication : On pourra remarquer que $I_n = A^\top A$.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $\Delta_n = \det(A_n)$.

(1) Calculer Δ_2 et Δ_3.

(2) Calculer Δ_n en fonction de a et n (on pourra procéder de façon directe ou par récurrence).

(3) Calculer le rang de la matrice A_n en fonction de a.

Exercice 4. Soient $a, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$H = \begin{pmatrix} a+\lambda_1 & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+\lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Indication : Décomposer chaque colonne comme combinaison linéaire du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'un autre vecteur, puis utiliser la multilinéarité du determinant.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 0 & 1/a \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver une relation entre A^2, A et I_3.

(2) En déduire le polynôme minimal π_A de A.

(3) Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme π_A.

(4) En déduire A^n.