# Examen Partiel : Algèbre linéaire 2

9 Novembre 2022 – durée 2h

**N.B.** Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

**Exercice 1.** On considère les matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer la matrice $B = TA$ et calculer le déterminant de $B$.

(2) Déduire de la question précédente le déterminant de $A$.

(3) Déduire de la question précédente le déterminant de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & -6 & 40 \end{pmatrix}.$$

Un calcul directe de $\det(C)$ n'est pas accepté.

*Corrigé l'exercice 1.* (1) On trouve

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ 0 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire étant égal au produit des éléments sur sa diagonale, on trouve $\det(B) = 48$.

(2) Pour la même raison, on a $\det(T) = 1$. De la formule

$$\det(B) = \det(TA) = \det(T) \times \det(A)$$

on déduit $\det(A) = 48$.

(3) $C$ est obtenu à partir de $A$ en multipliant la première colonne par 3 , la deuxième par $-1/2$, et la troisième par 5 . On a donc

$$\det(C) = 3 \times \frac{-1}{2} \times 5 \det(A) = -360$$

**Exercice 2.** Soient $n$ un entier naturel et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, c'est-à-dire vérifiant $A^\top A = I_n$ (où $A^\top$ est la matrice transposée de $A$).

(1) Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

(2) On suppose désormais que $\det(A) = 1$ et que $n$ est impair. Montrer que la matrice $A - I_n$ n'est pas inversible.
Indication : On pourra remarquer que $I_n = A^\top A$.

*Corrigé l'exercice 2.* (1) On a

$$1 = \det(I_n) = \det\left(A^\top A\right) = \det(A^\top) \times \det(A) = \det(A)^2,$$

donc $\det(A) = \pm 1$.

(2) Supposons que $\det(A) = 1$ et que $n$ est impair.

$$\begin{aligned} \det(A - I_n) &= \det\left(A - AA^\top\right) \\ &= \det(A) \det\left(I_n - A^\top\right) \\ &= \det(I_n - A) \\ &= (-1)^n \det(A - I_n) \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - (-1)^n) \det(A - I_n) = 0$$

Comme $n$ est impair, $1 - (-1)^n = 2$ et $\det(A - I_n) = 0$.

**Exercice 3.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $\Delta_n = \det(A_n)$.

(1) Calculer $\Delta_2$ et $\Delta_3$.

(2) Calculer $\Delta_n$ en fonction de $a$ et $n$ (on pourra procéder de façon directe ou par récurrence).

(3) Calculer le rang de la matrice $A_n$ en fonction de $a$.

*Corrigé l'exercice 3.* (1) On a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1).$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & a & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ a-1 & a-1 \end{vmatrix}$$
$$= a(a-1)^2.$$

(3) Soit $n \geq 1$. On a

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a & \cdots & \cdots & a \end{vmatrix}_{[n]} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & a & \cdots & a \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & a-1 & \cdots & & a-1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= a\begin{vmatrix} a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a-1 & \cdots & & a-1 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

$$= a(a-1)^{n-1}.$$

(4) Si $n = 1$, alors $A_1 = (a)$ est de rang 1 si $a \neq 0$ et $A_1 = (0)$ si $a = 0$.

Supposons $n > 1$, alors :

- si $a \notin \{0, 1\}$ alors $A_n$ est inversible (car $\det A_n \neq 0$) et $\operatorname{rang}(A_n) = n$ ;
- si $a = 0$, alors $\operatorname{rang}(A_n) = n - 1$ ;
- si $a = 1$, alors $\operatorname{rang}(A_n) = 1$.

**Exercice 4.** Soient $a, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$H = \begin{pmatrix} a+\lambda_1 & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+\lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Indication : Décomposer chaque colonne comme combinaison linéaire du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'un autre vecteur, puis utiliser la multilinéarité du determinant.

*Corrigé l'exercice 4.* On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a+\lambda_1 \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \lambda_1 E_1 + aC$$

avec $E_1$ colonne élémentaire et $C$ colonne constituée de 1 . On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$\det H = \det(\lambda_1 E_1 + aC, \ldots, \lambda_n E_n + aC).$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne $C$ apparait deux fois. On obtient

$$\det H = \det(\lambda_1 E_1, \cdots, \lambda_n E_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(\lambda_1 E_1, \ldots, aC, \ldots, \lambda_n E_n)$$

Or

$$\begin{aligned} \det(\lambda_1 E_1, \cdots, \lambda_n E_n) &= (\lambda_1 \cdots \lambda_n) \det(E_1, \cdots, \ E_n) \\ &= (\lambda_1 \cdots \lambda_n) \times 1 \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \det(\lambda_1 E_1, \ldots, aC, \ldots, \lambda_n E_n) = a \sum_{i=1}^{n} \det(\lambda_1 E_1, \ldots, C, \ldots, \lambda_n E_n) \\ &= a \sum_{i=1}^{n} \det(\lambda_1 E_1, \ldots, E_1 + \cdots + E_n, \ldots, \lambda_n E_n) \\ &= a \sum_{i=1}^{n} \det(\lambda_1 E_1, \ldots, E_i, \ldots, \lambda_n E_n) \\ &= a \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \cdots \lambda_n) \det(E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_n) \\ &= a \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\det H = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i + a \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k$$

**Exercice 5.** Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 0 & 1/a \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver une relation entre $A^2$, $A$ et $I_3$.
(2) En déduire le polynôme minimal $\pi_A$ de $A$.
(3) Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n$ par le polynôme $\pi_A$.
(4) En déduire $A^n$.

*Corrigé l'exercice 5.* (1) On trouve $A^2 = A + 2I_3$.

(2) Le polynôme $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$ est un polynôme annulateur de $A$. Comme $A \neq I_3$ et $A \neq 2I_3$, le polynôme minimal de $A$ est $\pi_A(X) = (X-2)(X+1)$.

(3) Par division euclidienne de $X^n$ par $\pi_A(X)$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$X^n = (X-2)(X+1)Q(X) + \alpha X + \beta$$

On évalue cette égalité en 2 et $-1$ et on trouve

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

(4) On a

$$X^n = \pi_A(X)Q(X) + \alpha X + \beta$$

donc

$$A^n = \pi_A(A)Q(A) + \alpha A + \beta I_3$$

Comme $\pi_A(A) = 0$, on trouve

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3.$$