Algèbre linéaire 2
Examen du 16 Janvier 2024
durée : 3h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ \alpha & 1-\alpha & -2\alpha \\ 1-\alpha & -1+\alpha & -1+2\alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer le polynôme caractéristique de A_α.

(2) Préciser selon les valeurs de α le spectre de A_α ainsi que la multiplicité de chacune des valeurs propres.

(3) On suppose $\alpha \neq 1$.

(a) Déterminer les sous-espaces propres de A_α.

(b) Déduire que A_α est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(4) On suppose $\alpha = 1$

(a) Expliquer pourquoi A_1 n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$).

(b) Expliquer pourquoi A_1 est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

(c) Trigonaliser A_1.

Exercice 2. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}.$$

où $t \mapsto x_i(t)$ est une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, 4$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = A$, où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On se propose dans cet exercice de résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

(1) Montrer que le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^4$.

(2) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

(3) (a) Déterminer, $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_4)$, le sous-espace propre de A pour la valeur propre 2, et montrer qu'il est de dimension 2.

(b) Combien la réduite de Jordan de A admet-elle de blocs de Jordan associés à la valeur propre 2 ?

(c) Déterminer $\mathrm{Im}(A - 2I_4)$ par des équations.

(4) Fixons la base (v_1, v_2) de $E_2(A)$, où $v_1 = (2, 0, 0, -1)$ et $v_2 = (1, 1, 0, 0)$.

(a) Déterminer un vecteur $v_3 \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(v_3) = v_2 + 2v_3$ et un vecteur $v_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(v_4) = v_3 + 2v_4$. Assurez-vous que $v_3 \in \mathrm{Im}(A - 2I_4)$ pour rendre possible le choix de v_4.

(b) Vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(5) En déduire la réduite de Jordan J de A et une matrice inversible P telle que $A = PJP^{-1}$.

(6) Ecrire la décomposition de Dunford de J. En déduire e^{tJ} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(7) En déduire la solution générale du système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 3. (1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

Montrer que si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors toute valeur propre de f est racine de P.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par

$$\forall M \in E, \quad f(M) = M + \mathrm{tr}(M)A.$$

où $\mathrm{tr}(M)$ est la trace de M.

(a) Montrer que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de f.

(b) Montrer que le spectre de f est réduit à $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$.

(c) f est-il diagonalisable ?