Algèbre linéaire 2
Examen du 16 Janvier 2024
durée : 3h
sur 30

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. [10 points] Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ \alpha & 1-\alpha & -2\alpha \\ 1-\alpha & -1+\alpha & -1+2\alpha \end{pmatrix}.$$

(1)[1] Déterminer le polynôme caractéristique de A_α.
(2)[1] Préciser selon les valeurs de α le spectre de A_α ainsi que la multiplicité de chacune des valeurs propres.
(3) On suppose $\alpha \neq 1$.
(a)[2] Déterminer les sous-espaces propres de A_α.
(b)[1] Déduire que A_α est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
(4) On suppose $\alpha = 1$
(a)[1] Expliquer pourquoi A_1 n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$).
(b)[1] Expliquer pourquoi A_1 est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
(c)[3] Trigonaliser A_1.

Solution de l'exercice 1. (1) On calcul

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ \alpha & 1-\alpha-\lambda & -2\alpha \\ 1-\alpha & -1+\alpha & -1+2\alpha-\lambda \end{vmatrix}$$

On fait d'abord $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ et on obtient

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 1-\lambda & 1-\alpha-\lambda & -2\alpha \\ 0 & -1+\alpha & -1+2\alpha-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1-\alpha-\lambda & -2\alpha \\ 0 & -1+\alpha & -1+2\alpha-\lambda \end{vmatrix}$$

ensuite on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, donc

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2-\alpha-\lambda & -2\alpha+2 \\ 0 & -1+\alpha & -1+2\alpha-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\alpha-\lambda & -2\alpha+2 \\ -1+\alpha & -1+2\alpha-\lambda \end{vmatrix}$$

puis finalement, on fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, d'où

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\alpha-\lambda & -2\alpha+2 \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 2-\alpha-\lambda & -2\alpha+2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2(\alpha-\lambda)$$

(2) Si $\alpha \neq 1$ alors 1 est valeur propre de multiplicité 2 et α est valeur propre simple, $\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \{1, \alpha\}$.
Si $\alpha = 1$, alors $\chi_{A_\alpha}(\lambda) = (1-\lambda)^3$: 1 est la seule valeur propre et elle est de multiplicité 3, $\mathrm{Sp}(A_1) = \{1\}$.
(3) On suppose $\alpha \neq 1$.
(a) Après calcul on trouve

$$E_\alpha(A_\alpha) = \mathrm{vect}\left((1, \alpha, 1-\alpha)\right)$$
$$E_1(A_\alpha) = \mathrm{vect}\left((2,0,1), (0,2,-1)\right)$$

(b) Puisque $\dim E_1(A_\alpha) + \dim E_\alpha(A_\alpha) = 3$, la matrice A_α est diagonalisable.
(4) On suppose $\alpha = 1$. La matrice A_1 est donc

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après ce qui précède $\chi_{A_1}(\lambda) = (1-\lambda)^3$ et

$$E_1(A_\alpha) = \mathrm{vect}\left((2,0,1), (1,1,0)\right)$$

le vecteur $(0,2,-1)$ est la combinaison $(0,2,-1) = 2(1,1,0) - (2,0,1)$.
(a) 1 étant l'unique valeur propre, la matrice A_1 n'est pas diagonalisable, car sinon elle serait semblable (et donc égale) à la matrice identité I_3, ce qui serait absurde.

(b) $\chi_{A_1} = (\lambda) = (1-\lambda)^3$ étant scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A_1 est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
(c) Comme $\dim E_1(A_1) = 2$, la réduite de Jordan de A_1 admet deux blocs de Jordan (pour la vp 1).

On pose $v_1 = (2,0,1)$ et $v_2 = (1,1,0)$. Cherchons v_3 tel que $A_1 v_3 = v_2 + v_3$. On trouve par exemple $v_3 = (1,0,0)$. La famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de l'endomorphisme naturel associé à A_1 dans cette base est la réduite de Jordan de A_1

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, on a $A_1 = PJP^{-1}$.

Exercice 2. [15 points] On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}.$$

où $t \mapsto x_i(t)$ est une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, 4$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = A$, où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On se propose dans cet exercice de résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

(1)[2] Montrer que le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^4$.

(2)[1] La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

(3) (a)[1, 5] Déterminer, $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_4)$, le sous-espace propre de A pour la valeur propre 2, et montrer qu'il est de dimension 2.

(b)[1] Combien la réduite de Jordan de A admet-elle de blocs de Jordan associés à la valeur propre 2 ?

(c)[1] Déterminer $\mathrm{Im}(A - 2I_4)$ par des équations.

(4) Fixons la base (v_1, v_2) de $E_2(A)$, où $v_1 = (2,0,0,-1)$ et $v_2 = (1,1,0,0)$.

(a)[1 + 1] Déterminer un vecteur $v_3 \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(v_3) = v_2 + 2v_3$ et un vecteur $v_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(v_4) = v_3 + 2v_4$. Assurez-vous que $v_3 \in \mathrm{Im}(A - 2I_4)$ pour rendre possible le choix de v_4.

(b)[1] Vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(5)[1 + 1] En déduire la réduite de Jordan J de A et une matrice inversible P telle que $A = PJP^{-1}$.

(6)[0, 5 + 2] Ecrire la décomposition de Dunford de J. En déduire e^{tJ} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(7)[3] En déduire la solution générale du système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

Solution de l'exercice 2. (1) On trouve facilement $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^4$.

(2) Puisque A admet comme unique valeur propre 2, alors A n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$) car sinon elle serait semblable (et donc égale) à la matrice $2I_4$, ce qui n'est pas le cas.

Comme χ_A est scindé, la matrice A est trigonalisable (dans $\mathbb{R}$ et à fortiori dans $\mathbb{C}$).

(3) (a) Après calcul on trouve $E_2(A) = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$ où

$$v_1 = (2,0,0,-1), v_2 = (1,1,0,0)$$

(b) Puisque $\dim E_2(A) = 2$, alors la réduite de Jordan de a admet deux blocs de Jordan associé à la valeur propre 2.

(c) En utilisant l'algorithme de Gauss à $A - 2I_4$ on trouve que $v = (x,y,z,t)^\top$ est dans $\mathrm{Im}(A - 2I_4)$ si

$$x - y - z = 0 \ \text{ et } \ x - y + t = 0.$$

(4) (a) On cherche $v_3 = (x,y,z,t)^\top$ tel que $f(v_3) = v_2 + 2v_3$. On trouve alors $v_3 = (-1 + y - 2z, y, 1, z)$. On peut donc prendre par exemple $v_3 = (1,0,1,-1)$ (pour $y = 0$ et $z = -1$). On remarque que ce vecteur est bien dans $\mathrm{Im}(A - 2I_4)$.

Ensuite on cherche $v_4 = (x,y,z,t)^\top$ tel que $f(v_4) = v_3 + 2v_4$. On trouve alors $v_4 = (y - 2z, y, 1, z)$. On peut donc prendre par exemple $v_4 = (0,0,1,0)$ (pour $y = 0$ et $z = 0$).

(b) Il est facile de vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(5) La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la réduite de Jordan de A, à savoir

$$J = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ étant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, on a $A = PJP^{-1}$.

(6) Comme J est une matrice diagonale par blocs

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & K \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on a

$$e^{tJ} = \left(\begin{array}{c|c} e^{2t} & 0 \\ \hline 0 & e^{tK} \end{array}\right)$$

Il suffit donc de calculer e^{tK}. Or $K = 2I_3 + N$ où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice nilpotente de degré 3 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$e^{tK} = e^{2tI_3+tN} = e^{2tI_3}e^{tN} = e^{2t}I_3e^{tN} = e^{2t}e^{tN}$$

et

$$e^{tN} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}N^n = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2$$

donc

$$e^{tK} = e^{2t}(I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2)$$

et finalement

$$e^{tJ} = \left(\begin{array}{c|c} e^{2t} & 0 \\ \hline 0 & e^{2t}(I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2) \end{array}\right) = e^{2t}\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2 \end{array}\right)$$

c-à-d.

$$e^{tJ} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(7) La solution générale du système différentiel est de la forme $X(t) = e^{tA}X_0$ où $X_0 \in \mathbb{R}^4$. Comme $A = PJP^{-1}$, on a $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$. Donc $X(t) = Pe^{tJ}P^{-1}X_0$. On pose $P^{-1}X_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$. Donc

$$X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$$

puis on trouve

$$X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 & 1 & t+1 & t+t^2/2 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \\ -1 & 0 & -1 & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. [5 points](1)[1] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

Montrer que si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors toute valeur propre de f est racine de P.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par

$$\forall M \in E, \quad f(M) = M + \operatorname{tr}(M)A.$$

où $\operatorname{tr}(M)$ est la trace de M.

(a)[2] Montrer que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de f.

(b)[1] Montrer que le spectre de f est réduit à $\operatorname{Sp}(f) = \{1\}$.

(c)[1] f est-il diagonalisable ?

Solution de l'exercice 3. (1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose que P annule f.

Soit λ une valeur propre de f.

Prouvons que $P(\lambda) = 0$. λ valeur propre de f donc : $\exists x \in E\backslash\{0\} / f(x) = \lambda x$.

On prouve alors par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}, f^k(x) = \lambda^k x$.

Ainsi : $P(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k x = P(\lambda)x$.

Or $P(f) = 0$ donc $P(f)(x) = 0$ donc $P(\lambda)x = 0$.

Or $x \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

(a) Posons $P = X^2 - 2X + 1$.

Prouvons que P est annulateur de f c'est-à-dire que $P(f) = 0$.

Soit $M \in E$.

$$f^2(M) = f \circ f(M) = (M + \operatorname{tr}(M)A) + \operatorname{tr}(M + \operatorname{tr}(M)A)A.$$

C'est-à-dire, par linéarité de la trace, $f^2(M) = M + \operatorname{tr}(M)A + \operatorname{tr}(M)A + \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(A)A$.

Or $\operatorname{tr}(A) = 0$ donc $f^2(M) = M + 2\operatorname{tr}(M)A$.

Ainsi $f^2(M) - 2f(M) + \operatorname{Id}(M) = M + 2\operatorname{tr}(M)A - 2M - 2\operatorname{tr}(M)A + M = 0$.

On a donc prouvé que $f^2 - 2f + \operatorname{Id} = 0$.

C'est-à-dire P est annulateur de f.

(b) On a $P = (X-1)^2$ et P est annulateur de f.

Donc d'après (1), $\mathrm{Sp}(f) \subset \{1\}$.
De plus $A \neq 0$ et $f(A) = A$ donc $\mathrm{Spec}(f) = \{1\}$.
(c) Ainsi, si f était diagonalisable alors on aurait $f = \mathrm{Id}$.
Or $f\left(\mathrm{I_n}\right) \neq \mathrm{I_n}$ (puisque $\mathrm{tr}\left(\mathrm{I_n}\right) \neq 0$) donc $f \neq \mathrm{Id}$.
On obtient donc une contradiction.
On en déduit que f n'est pas diagonalisable.