Algèbre linéaire L2
CCI2 du 21/10/2021 à 10h15
Documents et calculatrices interdits
Durée : 2 heures

Le barème tiendra compte de la longueur du sujet. L'évaluation des copies prendra en compte la précision des arguments et la qualité de la rédaction.

Exercice 1 *(exercice de cours et de TD)*

1. *Définir la notion d'application multilinéaire et celle d'application alternée.*
2. *Soit $v : (\mathbb{R}^3)^3 \to \mathbb{R}$ une application multilinéaire alternée. Montrer que pour $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, on a*
$$v(B+C, C+A, A+B) = 2v(A, B, C).$$
3. *Soient $a, b, c, \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant*
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$
4. *En utilisant la deuxième question, calculer le déterminant*
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}.$$
A quelles conditions sur a, b, c ce déterminant est-il nul ?

Exercice 2 *Calculer le déterminant suivant :*
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3 *Soient $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$. On note $\Delta_n(s_1, \ldots, s_n)$ le déterminant :*
$$\Delta_n(s_1, \ldots, s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & \ldots & \ldots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \ldots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{vmatrix}.$$

1. Etablir une relation de récurrence entre $\Delta(s_1, \ldots, s_n)$ et $\Delta_{n-1}(s_2 - s_1, \ldots, s_n - s_1)$.
2. Montrer que $\Delta_n(s_1, \ldots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1})$.
3. En particulier, $\Delta_n(s_1, \ldots, s_n)$ est nul si $s_2 = s_1$: montrer directement ce résultat. Même question dans le cas $s_n = s_{n-1}$.

Exercice 4

1. *Enoncer le résultat qui fait le lien entre le rang d'une matrice et les déterminants de ses matrices extraites.*

2. *Calculer le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

puis, en utilisant le résultat énoncé dans la question 1, déterminer le rang de cette matrice.

Exercice 5 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f \circ f = -Id_E$.*

1. *Montrer que n est pair (on pourra étudier le déterminant de $f \circ f$).*
2. *Donner un exemple de telle application linéaire f lorsque $E = \mathbb{R}^2$.*