Algèbre linéaire L2
CCI2 du 21/10/2021 à 10h15
Documents et calculatrices interdits
Durée : 2 heures

Exercice 1 *(exercice de cours et de TD)*

1. *Définir la notion d'application multilinéaire et celle d'application alternée.*
2. *Soit $v : (\mathbb{R}^3)^3 \to \mathbb{R}$ une application multilinéaire alternée. Montrer que pour $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, on a*
$$v(B+C, C+A, A+B) = 2v(A, B, C).$$
3. *Soient $a, b, c, \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant*
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$
4. *En utilisant la deuxième question, calculer le déterminant*
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}.$$
A quelles conditions sur a, b, c ce déterminant est-il nul ?

Correction :
1) Cf poly.
2) On a, par linéarité par rapport à la première variable,
$$v(B+C, C+A, A+B) = v(B, C+A, A+B) + v(C, C+A, A+B).$$
Par linéarité par rapport à la deuxième variable, on a
$$\begin{aligned} v(B, C+A, A+B) &= v(B, C, A+B) + v(B, A, A+B) \\ v(C, C+A, A+B) &= v(C, C, A+B) + v(C, A, A+B) \end{aligned}$$
En développant pour finir par rapport à la troisième variable, on trouve que $v(B+C, C+A, A+B)$ est somme des huit termes
$$\begin{aligned} v(B+C, C+A, A+B) = {} & v(B, C, A) + v(B, C, B) + v(B, A, A) + v(B, A, B) \\ & + v(C, C, A) + v(C, C, B) + v(C, A, A) + v(C, A, B) \end{aligned}$$
Or, v est alternée, donc tous ces termes sont nuls dès qu'on a deux variables égales. Il ne reste que deux termes non nuls, à savoir $v(B, C, A) + v(C, A, B)$. Le fait que v soit alternée implique aussi que $v(B, C, A) = -v(B, A, C) = v(A, B, C)$ et $v(C, A, B) = -v(A, C, B) = v(A, B, C)$. On montre ainsi finalement
$$v(B+C, C+A, A+B) = 2v(A, B, C).$$
3) Par multilinéarité, on obtient
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

En retranchant la première colonne à la deuxième et à la troisième, ce déterminant est donc égal à $abc\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}$. Par développement par rapport à la première ligne, on obtient $abc\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}$, soit $abc\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a)\end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ b+a & c+a\end{vmatrix}$ par linéarité de nouveau, soit finalement $abc(b-a)(c-a)(c-b)$.

4) On pose $B = \begin{pmatrix} b\\ b^2\\ b^3\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c\\ c^2\\ c^3\end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} a\\ a^2\\ a^3\end{pmatrix}$. Le déterminant qu'on cherche à calculer est alors $\det_{\mathcal{C}}(B+C, C+A, A+B)$, et d'après la question 2), il est égal à $2\det_{\mathcal{C}}(A,B,C)$, soit $2abc(b-a)(c-a)(c-b)$ d'après la question 3). Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, ce déterminant est donc nul si et seulement si $a=0$ ou $b=0$ ou $c=0$ ou $a=b$ ou $b=c$ ou $a=c$.

Exercice 2 *Calculer le déterminant suivant :*

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

Correction : On retranche la première colonne à la deuxième, puis à la troisième, puis à la quatrième. On trouve après ces trois opérations

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix}.$$

La matrice est triangulaire inférieure, son déterminant est le produit des éléments diagonaux, soit $1\times(-2)\times(-2)\times(-2) = -8$.

Exercice 3 *Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. On note $\Delta_n(s_1, \dots, s_n)$ le déterminant :*

$$\Delta_n(s_1,\dots,s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1\\ \vdots & s_2 & \dots & s_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_1 & s_2 & \dots & s_n\end{vmatrix}.$$

1. Etablir une relation de récurrence entre $\Delta(s_1,\dots,s_n)$ et $\Delta_{n-1}(s_2-s_1,\dots,s_n-s_1)$.
2. Montrer que $\Delta_n(s_1,\dots,s_n) = s_1(s_2-s_1)(s_3-s_2)\cdots(s_n-s_{n-1})$.
3. En particulier, $\Delta_n(s_1,\dots,s_n)$ est nul si $s_2 = s_1$: montrer directement ce résultat. Même question dans le cas $s_n = s_{n-1}$.

Correction :

1) On retranche la première colonne aux autres colonnes et on obtient

$$\Delta_n(s_1,\dots,s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \dots & s_1\\ \vdots & s_2-s_1 & \dots & s_2-s_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_1 & s_2-s_1 & \dots & s_n-s_1\end{vmatrix}$$

Par développement par rapport à la première ligne, on obtient

$$\Delta_n(s_1,\ldots,s_n) = s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \ldots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 - s_1 & \ldots & s_n - s_1 \end{vmatrix},$$

soit

$$\Delta_n(s_1,\ldots,s_n) = s_1 \Delta_{n-1}(s_2 - s_1, \cdots, s_n - s_1)\,.$$

2) On montre la formule indiquée dans l'énoncé par récurrence. Pour $n = 1$, on a $\Delta_1(s_1) = s_1$, ce qui initialise la formule. D'après la question 1), on a

$$\Delta_n(s_1,\ldots,s_n) = s_1 \Delta_{n-1}(s_2 - s_1, \cdots, s_n - s_1) \tag{1}$$

et par hypothèse de récurrence appliquée au rang $n-1$,

$$\Delta_{n-1}(t_1,\ldots,t_{n-1}) = t_1(t_2 - t_1)\cdots(t_{n-1} - t_{n-2}).$$

Cette formule avec $t_1 = s_2 - s_1, t_2 = s_3 - s_1, \ldots, t_{n-1} = s_n - s_1$ fournit

$$\Delta_{n-1}(s_2 - s_1, \cdots, s_n - s_1) = (s_2 - s_1)((s_3 - s_1) - (s_2 - s_1))\cdots((s_n - s_1) - (s_{n-1} - s_1)).$$

On a donc $\Delta_{n-1}(s_2 - s_1, \cdots, s_n - s_1) = (s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\cdots(s_n - s_{n-1})$, ce qui avec (1) donne la formule souhaitée au rang n.
3) Si $s_1 = s_2$, alors les deux premières colonnes sont nulles. Le déterminant est nul dans ce cas. De la même manière, si $s_{n-1} = s_n$, alors les deux dernières colonnes sont nulles, et le déterminant s'annule aussi.

Exercice 4

1. *Enoncer le résultat qui fait le lien entre le rang d'une matrice et les déterminants de ses matrices extraites.*
2. *Calculer le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

puis, en utilisant le résultat énoncé dans la question 1, déterminer le rang de cette matrice.

Correction :
1) Le rang d'une matrice A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice carrée extraite de A de taille r et de déterminant non nul. Autrement dit, si le rang de A est r, alors il existe une matrice extraite carrée de taille r et de déterminant non nul, et toutes les matrices extraites carrées de taille s avec $s > r$ sont de déterminant nul.
2) Par la règle de Sarrus, le déterminant de A vaut $15+24+24-27-20-16$, soit 0. Le déterminant du mineur 2×2 en haut à gauche vaut $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$. Il existe donc une matrice extraite de taille 2 de déterminant non nul, et pour toute matrice extraite de taille 3 (en fait il n'y en qu'une, c'est A elle-même), le déterminant est nul. Le rang de A est donc égal à 2.

Exercice 5 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f \circ f = -Id_E$.*

1. *Montrer que n est pair (on pourra étudier le déterminant de $f \circ f$).*
2. *Donner un exemple de telle application linéaire f lorsque $E = \mathbb{R}^2$.*

Correction :
1) On calcule $\det(f \circ f)$ de deux manières différentes, de façon à obtenir une condition sur n. D'une part, $\det(f \circ f) = \det(f) \cdot \det(f) = \det(f)^2$ par multiplicativité du déterminant. On a donc $\det(f \circ f) \geq 0$. D'autre part, $\det(f \circ f) = \det(-Id_E) = (-1)^n \det(Id_E) = (-1)^n$. Ainsi, $(-1)^n \geq 0$, donc n est pair.
2) On peut trouver un exemple par essais successifs. On peut aussi en trouver un géométriquement : on cherche une transformation du plan $\mathbb{R}^2$ dont le carré soit $-Id_{\mathbb{R}^2}$, c'est-à-dire la symétrie centrale. On peut donc prendre la rotation de 90 degrés, donc le carré sera la rotation de 180 degrés, soit $-Id_{\mathbb{R}^2}$.

On peut donc poser f dont la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son carré aura pour matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et sera donc bien $-Id_{\mathbb{R}^2}$.