Algèbre linéaire L2
CCI2 du 23/10/2020, 9h
Documents et calculatrices interdits

Le barème tiendra compte de la longueur du sujet. L'évaluation des copies prendra en compte la précision des arguments et la qualité de la rédaction.

Exercice 1 *(exercice de cours)*

1. *Définir la notion d'application multilinéaire.*
2. *Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application ϕ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est multilinéaire.*

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 + y_2 + z_3$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$$

3. *Soit n un entier naturel. Pour $y_1, \ldots, y_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $x_{i,j}$ les nombres tels que $y_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$. Soit ω la fonction définie par :*

$$\begin{array}{rcccl} \omega & : & (\mathbb{R}^n)^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (y_1, \ldots y_n) & \longmapsto & \omega(y_1, \ldots, y_n) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}. \end{array}$$

Montrer que ω est multilinéaire.

Exercice 2 *(exercice de cours) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Donner la définition de ${}^tA$, la transposée de A. Montrer que $\det({}^tA) = \det(A)$.*

Exercice 3 *Pour quelles valeurs des paramètres le déterminant suivant est-il nul ?*

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Exercice 4 *Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer, que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.*

Exercice 5 *Soient* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *une matrice carrée et* $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *où* $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$.

1. *Soit* C *la matrice obtenue en multipliant les colonnes de* A *d'indice impair par* -1. *Donner une formule pour les coefficients* $c_{i,j}$ *de la matrice* C *en fonction des coefficients* $a_{i,j}$. *Etablir par ailleurs une relation entre le déterminant de* A *et celui de* C.
2. *Soit* D *la matrice obtenue en multipliant les lignes de* C *d'indice impair par* -1. *Donner une formule pour les coefficients* $d_{i,j}$ *de la matrice* D *en fonction des coefficients* $a_{i,j}$. *Etablir par ailleurs une relation entre le déterminant de* A *et celui de* D.
3. *Calculer* $det(B)$ *en fonction de* $det(A)$.

On considère la propriété suivante :

Propriété 1 *Soit* n *un entier naturel non nul et* $A = (a_{k,l}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que pour tout* k *et* l, $a_{k,l} \in \{-1, 1\}$. *Alors* $\det(A)$ *est divisible par* 2^{n-1}.

Exercice 6 *On se propose de montrer la Propriété 1 par récurrence sur* n.

1. *Soit* A *une matrice à coefficients dans* $\{-1, 1\}$. *Montrer que* $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
2. *Montrer la Propriété 1 lorsque* $n = 1$.

   Supposer la Propriété 1 démontrée pour une valeur de n, *et soit* $A = (a_{k,l}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ *telle que* $\forall k, l, a_{k,l} \in \{-1, 1\}$.
3. *Montrer que si* $\forall k, l, a_{k,l} = 1$, *alors* 2^n *divise* $\det(A)$.
4. *Sinon, soit* (i, j) *un couple d'indices tel que* $a_{i,j} = -1$. *Soit* $A' = (a'_{k,l})$ *la matrice avec* $a'_{k,l} = a_{k,l}$ *pour* k, l *tels que* $(k, l) \neq (i, j)$, *et* $a'_{i,j} = 1$. *Soit* $(C_1, \ldots, C_{n+1})$ *les vecteurs colonnes de* A, *et* $(C'_1, \ldots, C'_{n+1})$ *les vecteurs colonnes de* A'. *Donner une relation entre les vecteurs* C_k *et les vecteurs* C'_k *lorsque* $k \neq j$.
5. *Calculer le vecteur* $C'_j - C_j$.
6. *Montrer que* $\det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C'_j - C_j, C_{j+1}, \ldots, C_{n+1}) = \det(A') - \det(A)$.
7. *Montrer que* 2^n *divise* $\det(A') - \det(A)$.
8. *Montrer la Propriété 1 par récurrence sur* n.