Algèbre linéaire 2

Correction du CCI2

Exercice 1 :

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une application $f : E^p \longrightarrow F$ est **multilinéaire**, ou p-**multilinéaire** si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, et tous vecteurs $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \in E$ fixés, l'application

$$x \longmapsto f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_p)$$

est une application linéaire de E dans F. Autrement dit, pour tous $x, y \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}f(x_1, ..., x_2, x_{i-1}, &x + \lambda y, x_{i+1}, ..., x_p) = \\ &f(x_1, ..., x_2, x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_p) + \lambda f(x_1, ..., x_2, x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_p).\end{aligned}$$

2. *Pour identifier rapidement si une application est multilinéaire, on peut se servir des deux faits suivants.*

Fait 1. *Si $E_1, ..., E_r$ sont des espaces vectoriels, et si $\phi_i : E_i \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application multilinéaire pour tout i, alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times ... \times E_r & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_r) & \longmapsto & \phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2) \cdot \ldots \cdot \phi_r(x_r) \end{array}$$

est multilinéaire.

Fait 2. *Une somme d'applications multilinéaires est multilinéaire.*

Indiquons à présent quelles sont les applications multilinéaires parmi les applications proposées.

(a)

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 + y_2 + z_3$$

Cette application n'est pas multilinéaire. En effet,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 2 = 2 \cdot \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(b)

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_3 + y_2 z_1 + z_3 x_2$$

Cette application n'est pas multilinéaire. En effet,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 2 \cdot \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(c)

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$$

Cette application est multilinéaire. En utilisant le fait 1 rappelé ci-dessus, on peut en effet vérifier que chaque monôme $x_1y_2z_3$, $x_2y_3z_1$ et $x_3y_1z_2$ définit une application multilinéaire $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Par exemple, le monôme $x_1y_2z_3$ définit l'application obtenue par le produit des trois formes linéaires

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x_1 \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto y_2 \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto z_3 \in \mathbb{R}.$$

L'application ϕ est donc multilinéaire comme somme de trois applications multilinéaires (voir le fait 2).

(d)

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$$

Cette application n'est pas multilinéaire. En effet :

$$\phi\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 8 \neq 2 = 2 \cdot \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(e)

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$$

Cette application est multilinéaire, avec la même justification que pour le point (c).

(f)

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$$

Cette application est multilinéaire. Pour le voir, il suffit de remarquer que l'on peut obtenir ϕ par le produit des deux applications :

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto z_1 + z_3 \in \mathbb{R}.$$

Chacune de ces applications est multilinéaire (cela se voit comme aux points (c) et (e) ci-dessus), donc ϕ est multilinéaire par le fait 2.

(g)

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$$

Cette application n'est pas multilinéaire. En effet,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 2 = 2 \cdot \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Remarque : pour montrer que les applications non multilinéaires ne le sont effectivement pas, on aurait aussi pu utiliser le fait que pour une application trilinéaire ϕ, $\phi(u,v,w)$ est nul dès qu'un des vecteurs u, v ou w est nul (tous les contre-exemples ci-dessus sont construits ainsi).

3. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On va montrer que

$$\begin{aligned}&\omega(y_1,...,y_{i-1},u+\lambda v,y_{i+1},...,y_n)\\ &\qquad\qquad = \omega(y_1,...,y_{i-1},u,y_{i+1},...,y_n) + \lambda\omega(y_1,...,y_{i-1},v,y_{i+1},...,y_n)\end{aligned}$$

Pour cela, notons $u = (u_1,...,u_n)$, et $v = (v_1,...,v_n)$. Pour tout j, la j-ième coordonnée de $u+\lambda v$ est donc $u_j + \lambda v_j$. Ceci donne :

$$\begin{aligned}\omega(y_1,...,y_{i-1},u+\lambda v,y_{i+1},...,y_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(i-1),i-1}(u_{\sigma(i)}+\lambda v_{\sigma(i)})x_{\sigma(i+1),i+1}\dots x_{\sigma(n),n}.\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\Big[x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(i-1),i-1}u_{\sigma(i)}x_{\sigma(i+1),i+1}\dots x_{\sigma(n),n}\\ &\qquad + \lambda x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(i-1),i-1}v_{\sigma(i)}x_{\sigma(i+1),i+1}\dots x_{\sigma(n),n}\Big]\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(i-1),i-1}u_{\sigma(i)}x_{\sigma(i+1),i+1}\dots x_{\sigma(n),n}\\ &\qquad + \lambda\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(i-1),i-1}v_{\sigma(i)}x_{\sigma(i+1),i+1}\dots x_{\sigma(n),n}\\ &= \omega(y_1,...,y_{i-1},u,y_{i+1},...,y_n) + \lambda\omega(y_1,...,y_{i-1},v,y_{i+1},...,y_n).\end{aligned}$$

Ceci montre la formule annoncée, et donc que ω est multilinéaire.

Exercice 2 :
On a :

$${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Rappelons que $\det A = ad - bc$. En appliquant cette formule à ${}^tA$, on trouve

$$\det({}^tA) = ad - cb.$$

Ainsi, on a $\det({}^tA) = ad - bc = \det(A)$.

Exercice 3 :
Calculons le déterminant par des opérations sur les lignes et les colonnes. On obtient :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} &\overset{L_3\leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}\\ &\overset{\text{multilinéarité}}{=} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b+c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}\\ &\overset{C_2\leftarrow C_2-C_1,\ C_3\leftarrow C_3-C_1}{=} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(b+c+a) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Cette dernière matrice est triangulaire inférieure. Son déterminant est donc égal au produit des termes diagonaux. On trouve donc

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot(-(a+b+c))^2 = (a+b+c)^3.$$

Ainsi, le déterminant est nul si et seulement si $a+b+c=0$.

Pour vérifier le calcul, on peut contrôler que le déterminant est bien nul si $a+b+c=0$, c'est-à-dire si $a=-b-c$. On a alors

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2b-2c & -2(b+c) & -2(b+c) \\ 2b & 2b+2c & 2b \\ 2c & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est nul puisque la première et la troisième colonne sont identiques.

Exercice 4 :
Commençons par remarquer que puisque $119, 153$ et 289 sont divisibles par 17, il existe des entiers $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $119 = 17a$, $153 = 17b$ et $289 = 17c$.
Posons à présent $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. En procédant à l'opération $C_3 \leftarrow C_3 + 10C_2 + 100C_1$, on peut réécrire le déterminant de la manière suivante :

$$D \overset{C_3 \leftarrow C_3+10C_2+100C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 119 \\ 1 & 5 & 153 \\ 2 & 8 & 289 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 17a \\ 1 & 5 & 17b \\ 2 & 8 & 17c \end{vmatrix}.$$

Par multilinéarité du déterminant, on peut donc écrire :

$$D = 17 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 5 & b \\ 2 & 8 & c \end{vmatrix}.$$

On a par ailleurs $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 5 & b \\ 2 & 8 & c \end{vmatrix} \in \mathbb{Z}$ puisque la matrice apparaissant dans ce déterminant est à coefficients entiers. Cela montre donc que D est divisible par 17.

Exercice 5 :
1. On a :

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \text{ est pair} \\ -a_{i,j} & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases} \\ &= (-1)^j a_{i,j}. \end{aligned}$$

La matrice C s'obtient à partir de la matrice A en multipliant la colonne d'indice j par $(-1)^j$, pour $j = 1, \dots n$. Par multilinéarité du déterminant, on trouve donc :

$$\begin{aligned} \det(C) &= (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot \ldots \cdot (-1)^n \det(A) \\ &= (-1)^{\sum\limits_{j=1}^n j} \det(A) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \det(A). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \begin{cases} c_{i,j} & \text{si } i \text{ est pair} \\ -c_{i,j} & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases} \\ &= (-1)^i c_{i,j}. \end{aligned}$$

D'après la question 1, on a donc :

$$d_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}.$$

La matrice D s'obtient à partir de la matrice B en multipliant la ligne d'indice i par $(-1)^i$, pour $i = 1, \dots n$. Par multilinéarité du déterminant, on trouve donc :

$$\begin{aligned} \det(D) &= (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot \ldots \cdot (-1)^n \det(C) \\ &= (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} i} \det(C) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \det(C). \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question 1, on trouve donc :

$$\begin{aligned} \det(D) &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \det(A) \\ &= (-1)^{n(n+1)} \det(A). \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit $n(n+1)$ est toujours pair, puisque l'un des des deux nombres consécutifs n et $n+1$ est pair. Ceci montre que $(-1)^{n(n+1)} = 1$ quel que soit n. On en conclut que

$$\det(D) = \det(A).$$

3. D'après la question 2, la matrice B et la matrice D ont les mêmes coefficients. Elles sont donc égales. On a donc finalement :

$$\det(B) = \det(A).$$

Exercice 6 :

1. Rappelons qu'une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{Z}$ a un déterminant entier. En effet, pour tout $A \subset M_n(\mathbb{Z})$, si l'on note $a_{i,j}$ les coefficients de A, on a :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}.$$

Chaque terme $\epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ est un produit de nombres entiers, donc $\det(A)$ est une somme de nombres entiers. Ceci montre que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

Puisque -1 et 1 sont des nombres entiers, cela montre que pour toute matrice carrée A à coefficients dans $\{-1, 1\}$, on a $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

2. Si $n = 1$, alors $2^{n-1} = 1$. Puisque 1 divise tout nombre entier, il divise en particulier $\det(A)$, ce qui montre la propriété dans ce cas.

(Remarquons que si $n = 1$, on a $A = (a_{1,1})$, donc $\det(A) = a_{1,1} \in \{-1, 1\}$).

3. Si on a $a_{k,l} = 1$ pour tous k et l, la matrice A est formée de la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, répétée $n+1$ fois. Puisque $n+1 \geq 2$, la matrice A a donc au moins deux colonnes identiques,

ce qui montre que $\det(A) = 0$. Puisque 0 est divisible par tout nombre entier, ceci montre que 2^n divise $0 = \det(A)$ dans ce cas.

4. Si $k \neq j$, alors pour tout $l \in [\![1, n+1]\!]$, on a $(l, k) \neq (i, j)$, donc $a_{l,k} = a'_{l,k}$. Ceci montre que la colonne C_k est identique à la colonne C'_k :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{j\}, \quad C_k = C'_k.$$

5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Le coefficient sur la k-ième ligne de $C'_j - C_j$ vaut $a'_{k,j} - a_{k,j}$.
— Si $k \neq i$, alors $(k, j) \neq (i, j)$, donc $a'_{k,j} - a_{k,j} = 0$.
— Si $k = i$, alors $(k, j) = (i, j)$ donc

$$a'_{k,j} - a_{k,j} = a'_{i,j} - a_{i,j} = 1 - (-1) = 2.$$

Le vecteur colonne $C'_j - C_j$ est donc de la forme

$$C'_j - C_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

où le coefficient 2 se trouve sur la j-ième ligne.

6. Par multilinéarité du déterminant, on a :

$$\begin{aligned}&\det(C_1, \dots, C_{j-1}, C'_j - C_j, C_{j+1}, \dots, C_{n+1})\\ &\qquad = \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C'_j, C_{j+1}, \dots, C_{n+1}) - \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_{n+1})\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la question 3, on a $C_k = C'_k$ pour tout $k \neq j$. Ceci montre que

$$\begin{aligned}&\det(C_1, \dots, C_{j-1}, C'_j - C_j, C_{j+1}, \dots, C_{n+1})\\ &\qquad = \det(C'_1, \dots, C'_{j-1}, C'_j, C'_{j+1}, \dots, C'_{n+1}) - \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_{n+1})\\ &\qquad = \det(A') - \det(A),\end{aligned}$$

puisque $A' = (C'_1 \dots C'_{n+1})$ et $A = (C_1 \dots C_{n+1})$.

7. Notons D la matrice dont les colonnes sont $(C_1, \dots, C_{j-1},\ C'_j - C_j,\ C_{j+1}, \dots C_{n+1})$, et soit $D(j, j) \in M_n(\mathbb{Z})$ la matrice obtenue en retirant la j-ième ligne et la j-ième colonne de D. D'après la question 5, la j-ième colonne de D a son coefficient diagonal pour seul coefficient non-nul. Ainsi, en développant $\det(D)$ par rapport à la j-ième colonne, on trouve

$$\begin{aligned}\det(D) &= 2(-1)^{j+j} \det D(j, j)\\ &= 2 \det D(j, j).\end{aligned}$$

A présent, remarquons que $D(j, j)$ est une matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont dans $\{-1, 1\}$. D'après l'hypothèse de récurrence énoncée avant la question 3, 2^{n-1} divise donc $\det D(j, j)$. Il existe donc $d \in \mathbb{Z}$ tel que $\det D(j, j) = 2^{n-1} d$. Ainsi,

$$\det(D) = 2 \cdot 2^{n-1} d = 2^n d,$$

et 2^n divise donc $\det(D)$. Or, on a montré à la question 6 que $\det(D) = \det(A') - \det(A)$. On en conclut donc que $\det(A') - \det(A)$ est divisible par 2^n.

8. On a vu à la question 2 que la Propriété 1 était vraie lorsque $n = 1$, ce qui permet d'initialiser la récurrence.

Supposons à présent que $A = (a_{k,l}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ est une matrice dont tous les coefficients sont dans $\{-1, 1\}$, et montrons que 2^n divise $\det(A)$, ce qui terminera l'étape d'hérédité, et donc la récurrence. On va démontrer ce fait au moyen d'une autre démonstration par récurrence, comme suit.

Pour tout $m \in [\![0, (n+1)^2]\!]$, on notera $H(m)$ la proposition suivante :

$H(m)$: Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ une matrice dont les coefficients sont tous égaux à -1 ou 1. Supposons que A ait exactement m coefficients égaux à -1. Alors 2^n divise $\det(A)$.

Démontrons par récurrence que $H(m)$ est vraie pour tout $m \in [\![0, (n+1)^2]\!]$.

— Si $m = 0$, les coefficients de A sont tous égaux à 1. On a vu à la question 3 que 2^n divise $\det(A)$ dans ce cas. Ceci montre que $H(0)$ est vraie.

— Supposons que $H(m)$ est vraie pour un certain $m \in [\![1, (n+1)^2]\!]$. Si A a $m+1$ coefficients égaux à -1, alors on construit la matrice A' comme à la question 4. La matrice A' a alors exactement m coefficients égaux à -1 : on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence $H(m)$. Ceci montre que $\det(A')$ est divisible par 2^n. Par ailleurs, $\det(A') - \det(A)$ est divisible par 2^n d'après la question 7. Ainsi

$$\det(A) = \det(A') - (\det(A') - \det(A))$$

est divisible par 2^n, puisque $\det(A')$ et $\det(A') - \det(A)$ le sont.
Ceci achève de montrer par récurrence que $\det(A)$ est divisible par 2^n, quel que soit $m \in [\![0, (n+1)^2]\!]$.

La démonstration ci-dessus montre donc que la Propriété 1 est vraie au rang $n+1$. Ceci achève l'étape d'hérédité, et on en conclut donc que la Propriété 1 est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.