Algèbre linéaire 2 – Feuille 5

Réduction des d'endomorphismes scindés
Systèmes différentiels

Trigonalisation

Exercice 1. Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A est-elle diagonalisable ?
Montrer que A est semblable à la matrice de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Trigonaliser (à l'aide des sous-espaces caractéristiques) les matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Réduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

puis calculer ses puissances.

Exercice 5. Déterminer la suite réelle $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+4} = 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - 4u_{n+1} - 4u_n,$$
$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 11 \text{ et } u_3 = 20.$$

Exercice 6. On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(1) Factoriser le polynôme caractéristique de A.
(2) Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
(3) Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).

Exercice 7. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer la décomposition de Dunford de A.
(2) En déduire e^A.

Exercice 8. (1) Calculons la décomposition de Dunford de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) En déduire A^n pour tout entier n.

Exercice 9. Trouver les réduite de Jordan des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & -6 \\ -6 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. (1) Calculer la réduite de Jordan et une base de Jordan pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) En déduite e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Endomorphismes nilpotents

Exercice 11. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On suppose que $AN = NA$. Démontrer que $\det(A+N) = \det(A)$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si, pour tout $p \geq 1$, on a $\mathrm{Tr}\,(A^p) = 0$.

Exercice 13. Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

(1) Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.

(2) On considère

$$\begin{aligned} \phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto MB - BM. \end{aligned}$$

Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(3) Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B.

(4) En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

Systèmes différentiels

Exercice 14. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le polynôme minimal de A.

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

(c) Calculer e^A.

(d) En déduire la solution générale du système $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 15. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1'(t) &= (2-t)x_1(t) + (t-1)x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2(1-t)x_1(t) + (2t-1)x_2(t) \end{cases}$$

Exercice 16. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} y'(t) &= x(t) \\ z'(t) &= x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

Exercice 17. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= y(t) + t \\ z'(t) &= 2z(t) \end{cases}$$

Exercice 18. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= 10x(t) - 5y(t) + 7z(t) \\ z'(t) &= 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

Exercice 19. On se propose de résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) - 3x_3(t) - 3x_4(t) - 3x_5(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_3(t) + x_4(t) + x_5(t) \\ x_4'(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + 2x_4(t) + 3x_5(t) \\ x_5'(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) - x_4(t) - 2x_5(t) \end{cases}$$

Soit A la matrice du système,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que χ_A est scindé.

(2) Calculer la réduite de Jordan J de A et une matrice inversible P telle que $A = PJP^{-1}$.

(3) Calculer e^{tJ}, puis e^{tA}, pour $t \in \mathbb{R}$.

(4) En déduire la solution générale du système différentiel $X'(t) = AX(t)$.