Algèbre linéaire 2 – Feuille 5

Réduction des d'endomorphismes scindés Systèmes différentiels

Trigonalisation

Exercice 1. Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de A, on trouve $\chi_A(X) = (X-3)(X-2)^2$. On cherche ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre 3, en résolvant $AX = 3X$. Un rapide calcul montre qu'il est engendré par le vecteur propre $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre 2, en résolvant $AX = 2X$. On trouve cette fois qu'il est engendré par le vecteur propre $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Pour trigonaliser la matrice, il suffit de compléter la base par un troisième vecteur indépendant des deux premiers, par exemple $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $Au_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -6u_1 + u_2 + 2u_3$. La matrice A est donc semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage étant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Il n'y a bien sûr pas unicité ni de la matrice triangulaire supérieure à laquelle A est semblable, ni de la matrice de passage.

D'ailleurs, dans l'exemple de la matrice B, nous allons donner une forme plus précise à la trigonalisation. Le polynôme caractéristique de B est égal à $\chi_B(X) = (X+1)(X-1)^2$. On cherche une base de l'espace propre associé à la valeur propre -1 en résolvant l'équation $BX = -X$. On trouve que le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ engendre cet espace propre. Ensuite, on cherche une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1 en résolvant l'équation $BX = X$. On trouve que le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre cet espace propre. On cherche enfin un vecteur u_3 tel que $Bu_3 = u_3 + u_2$. On obtient que le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. Finalement, on a prouvé que $B = PTP^{-1}$, avec

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons qu'on peut toujours réduire une matrice trigonalisable de sorte que, hormis les coefficients diagonaux, les seuls coefficients non-nuls sont situés juste au-dessus de la diagonale, et ces coefficients hors-diagonale sont égaux à 0 ou 1 .

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A est-elle diagonalisable ?
Montrer que A est semblable à la matrice de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 2. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-1)^3$. 1 est la seule racine de ce polynôme, et comme $A \neq I_3$, A n'est pas diagonalisable. Cherchons l'espace propre associé à la valeur propre 1. Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On a $(x,y,z) \in \ker(f-I) \iff y+z = 0$. L'espace propre associé est donc de dimension 2 , de base (u_1, u_2) avec $u_1 = (1,0,0)^\top$ et $u_2 = (0,1,-1)^\top$. On cherche ensuite un troisième vecteur u_3 tel que $f(u_3) = u_2 + u_3$. Posons $u_3 = (x,y,z)$. Alors

$$f(u_3) = u_2 + u_3 \iff \begin{cases} x &= x \\ -z &= 1+y \\ y+2z &= -1+z \end{cases} \iff z = -1-y.$$

Posons alors $u_3 = (0,0,-1)^\top$. Il est clair que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est J. Donc A est semblable à J.

Exercice 3. Trigonaliser (à l'aide des sous-espaces caractéristiques) les matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 3. Déterminons le polynôme caractéristique de

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

On fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ dans $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ et on trouve

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 & -2 \\ -2 & 7-\lambda & -8 \\ -5 & 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -5 & -2 \\ 5-\lambda & 7-\lambda & -8 \\ -1 & 4 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

ensuite on fait $C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 + (7-\lambda)C_1$, donc

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -4\lambda+27 & \lambda^2-15\lambda+54 \\ 5-\lambda & -5\lambda+27 & \lambda^2-12\lambda+27 \\ -1 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

Or $\lambda^2 - 15\lambda + 54 = (\lambda-9)(\lambda-6)$ et $\lambda^2 - 12\lambda + 27 = (\lambda-9)(\lambda-3)$, donc

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (\lambda-9) \begin{vmatrix} 8-\lambda & -4\lambda+27 & \lambda-6 \\ 5-\lambda & -5\lambda+27 & \lambda-3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-9) \begin{vmatrix} -4\lambda+27 & \lambda-6 \\ -5\lambda+27 & \lambda-3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ensuite on développe ou bien on fait $C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2$ donc

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= -(\lambda-9) \begin{vmatrix} -4\lambda+27 & \lambda-6 \\ -5\lambda+27 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-9) \begin{vmatrix} -\lambda+9 & \lambda-6 \\ -2\lambda+18 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-9)^2 \begin{vmatrix} -1 & \lambda-6 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-9)^3 \quad \text{ouf!} \end{aligned}$$

Exercice 4. Réduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

puis calculer ses puissances.

Solution de l'exercice 4. Le polynôme caractéristique de B est $(1-X)(2-X)^2$

Le sous-espace propre associé a la valeur propre 1 est la droite engendrée par le vecteur $v_1 = (-1,1,2)^\top$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est la droite engendrée par le vecteur $(1,0,-1)^\top$.

$$(B - 2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 2 a pour équation $x - 2y + z = 0$. Considérons $v_3 = (1,1,1)^\top$.

$$(B - 2\mathrm{I}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prenons $v_2 = (-1,0,1)^\top$.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = 2\mathrm{I}_2 + N \text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente d'indice 2

Pour tout k dans N, la formule du binôme appliqué a $\left(2\mathrm{I}_2 + N^k\right)$ donne $C^k = 2^k\mathrm{I}_2 + k2^{k-1}N$.

$$B^k = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 - k2^{k-1} & -2 + 2^k + k2^{k-1} & 1 - 2^k - k2^{k-1} \\ -1 + 2^k & 2 - 2^k & -1 + 2^k \\ -2 + 2^{k+1} + k2^{k-1} & 4 - 2^{k+2} - k2^{k-1} & -2 + 3 \times 2^k + k2^{k-1} \end{pmatrix}$$

$0 \notin \mathrm{Sp}(B)$ La matrice B est inversible et :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & -2^{-2} \\ 0 & 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}.$$

L'expression de B^k est encore vraie pour k dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Déterminer la suite réelle $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+4} = 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - 4u_{n+1} - 4u_n, \\ &u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 11 \text{ et } u_3 = 20. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5. Notons

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous vérifions, par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0.$$

Le polynôme caractéristique de A est $(X+1)^2(X-2)^2$. Il est scindé sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe deux réels α et β et une matrice inversible P tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Les matrices $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent.

Pour tout entier n, la formule du binôme de Newton prouve que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n + n \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & n\alpha(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons également :

$$\begin{pmatrix} 2 & \beta \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n\beta 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, pour tout entier n nous écrivons :

$$X_n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & n\alpha(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n\beta 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

Nous en déduisons qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (a + nb)(-1)^n + (c + nd)2^n.$$

Ils sont déterminés de manière unique par le système :

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ -a - b + 2c + 2d = 0 \\ a + 2b + 4c + 8d = 11 \\ -a - 3b + 8c + 24d = 20 \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (n+1)(-1)^n + n2^n.$$

Exercice 6. On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(1) Factoriser le polynôme caractéristique de A.

(2) Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.

(3) Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).

Solution de l'exercice 6. (1) On a

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\left(X^2-2X\right) + (1-X) \\ &= (1-X)\left(X^2-2X+1\right) = (1-X)^3 \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de A admet une valeur propre triple $\lambda = 1$.

(2) Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A. La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 3 , le sous-espace propre associé est l'espace $E_1 = \ker(A-I)$, et on a

$$(x,y,z) \in E_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x-y = x \\ x-z = y \\ -x+2z = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Le sous-espace E_1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,0,1)$. Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = 1$, est le sous-espace $N_1 = \ker(A-I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $\chi_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A-I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_1 = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

(3) Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que $Ae_1 = e_1, Ae_2 = e_1 + e_2$ et $Ae_3 = e_2 + e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A-I)$, et $\ker(A-I)$ est la droite d'équations : $\{y = 0, x = z\}$. On détermine $e_2 = (x,y,z)$ tel que $Ae_2 = e_1 + e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1+y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-y = 1+x \\ x-z = y \\ -x+2z = 1+z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x-z = -1 \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (-1,-1,0)$ conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $\mathrm{A}e_3 = e_2 + e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-y = x-1 \\ x-z = y-1 \\ -x+2z = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = z \end{cases}$$

Le vecteur $e_3 = (0,1,0)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Décomposition de Dunford de B On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à I. Or, il existe un unique couple de matrices D et N, D diagonalisable et N

nilpotente, telles que $B = D + N$ et $DN = ND$. Or si

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^3 = 0$. La décomposition $B = D + N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

Exercice 7. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer la décomposition de Dunford de A.
(2) En déduire e^A.

Solution de l'exercice 7. (1 on trouve la décomposition de Dunford : $A = \Delta + B$ où

$$\Delta = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(2) Ainsi $e^A = e^\Delta \sum_{k=0}^{1} \frac{N^k}{k!} = e^\Delta (Id + N)$ car on remarque que $N^2 = 0$.
Or $\Delta = PDP^{-1}$ où $D = \operatorname{diag}(2,4,4)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 01 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & & \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} e^\Delta &= P \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} + e^4 & \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{2} & e^2 - e^4 \\ -\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{2} + e^4 & \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} & e^2 - e^4 \\ -\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} & \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{2} & e^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus

$$Id + N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$e^A = \begin{pmatrix} \frac{-e^2+9e^4}{2} & \frac{e^2-e^4}{2} & e^2 - 4e^4 \\ \frac{-e^2-5e^4}{2} & \frac{e^2+e^4}{2} & e^2 + 2e^4 \\ \frac{-e^2+7e^4}{2} & \frac{e^2-e^4}{2} & e^2 - 3e^4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. (1) Calculons la décomposition de Dunford de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) En déduire A^n pour tout entier n.

Solution de l'exercice 8. 1. On trouve $\chi_A(X) = -(X+1)(X-2)^2$. La valeur propre -1 est de multiplicité 1 , et la valeur propre 2 est de multiplicité 2 .

2. On calcule $N_{-1} = \operatorname{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R}v_1$ où $v_1 = (0,1,1)^\top$ (c'est bien un espace vectoriel de dimension $m_{-1} = 1$).

Calcul de $N_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)^2$ qui va être de dimension $m_2 = 2$:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pour une base de N_2, on choisit d'abord $v_2 \in E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3) \subset N_2$, par exemple $v_2 = (1,1,1)^\top$. On cherche $v_3 \in N_2$, linéairement indépendant de v_2. Par exemple, $v_3 = (1,0,1)^\top$.

- La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathbb{R}v_1}_{N_{-1}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}v_2 \oplus \mathbb{R}v_3}_{N_2}.$$

3. On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$ s'obtient en écrivant les vecteurs v_i en colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On définit l'endomorphisme d par $d(v_1) = -v_1$ (car $v_1 \in N_{-1}$), et $d(v_2) = 2v_2, d(v_3) = 2v_3$ (car $v_2, v_3 \in N_2$). Dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, la matrice de d est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de d dans la base $\mathcal{B}_0$ est obtenue en exprimant $d(e_i)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) ou, ce qui revient au même, par

$$\Delta = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. On pose

$$N = A - \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La décomposition de Dunford est $A = \Delta + N$. On a bien Δ diagonalisable car $D = P^{-1}\Delta P$. Pour vous rassurer, vérifiez que $N^2 = 0$ et que $\Delta N = N\Delta$.

(2) On a avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $D = P^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour tout $k \geqslant 0$:

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Pour la partie nilpotente, on pose

$$N' = P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } N'^2 = 0$$

La formule du binôme de Newton se réduit donc à seulement deux termes :

$$(D + N')^p = D^p + \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} D^{p-1}N' + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} D^{p-2}N'^2 + \cdots = D^p + pD^{p-1}N'$$

Donc

$$(D + N')^p = \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{p-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & -p2^{p-1} \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $p \geqslant 0$:

$$A^p = P(D + N')^p P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^p & p2^{p-1} & -p2^{p-1} \\ 2^p - (-1)^p & p2^{p-1} + 2^p & -p2^{p-1} - 2^p + (-1)^p \\ 2^p - (-1)^p & p2^{p-1} & -p2^{p-1} + (-1)^p \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Trouver les réduite de Jordan des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & -6 \\ -6 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 9. (1) Le polynôme caractéristique est $(1 - X)(X - 2)^2$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 a pour système d'équations :

$$\begin{cases} -x + 3y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

On obtient la droite engendrée par le vecteur $v_1 = (-1, 1, 2)^\top$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 a pour système d'équations :

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

C'est la droite engendrée par le vecteur $(1, 0, -1)^\top$.

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 2 a pour équation :

$$x - 2y + z = 0.$$

Prenons $v_3 = (1, 1, 1)^\top$.

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prenons $v_2 = (-1, 0, 1)^\top$.

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

$$\begin{aligned} u(v_1) &= v_1 \\ u(v_2) &= 2v_2 \text{ et} \\ u(v_3) &= 2v_3 + v_2. \end{aligned}$$

La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de u dans la base (v_1, v_2, v_3) est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = PTP^{-1}.$$

(2) Le polynôme caractéristique est $(X+1)^2(X-2)^2$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 a pour système d'équations :

$$\begin{cases} -2x + y - 2t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Il est de dimension 2, engendré par les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, 0, 0)^\top \text{ et } v_2 = (0, 2, 0, 1)^\top.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 a pour système d'équations :

$$\begin{cases} -9x + 3y + z - 6t = 0 \\ -6x + z - 6t = 0 \\ 6x - 3y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

C'est la droite engendrée par le vecteur : $(1, 1, 0, -1)^\top$.

$$(B + 2\mathrm{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 27 & -9 & 0 & 18 \\ 18 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 9 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 2 a pour système d'équations :

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ -2x + y - t = 0 \end{cases}$$

Il est engendré par les vecteurs $(1, 1, 0, -1)^\top$ et $(0, 0, 1, 0)^\top$. Considérons $v_4 = (0, 0, 1, 0)^\top$.

$$(B + 2\mathrm{I}_4) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nous prenons $v_3 = (1, 1, 0, -1)^\top$.

Soit u Y'endomorphisme canoniquement associé à B.

$$\begin{aligned} u(v_1) &= -v_1 \\ u(v_2) &= -v_2 \\ u(v_3) &= 2v_3 \text{ et} \\ u(v_4) &= 2v_4 + v_3. \end{aligned}$$

La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de l'endomorphisme f naturellement associé à A dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) est

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = PTP^{-1}.$$

Exercice 10. (1) Calculer la réduite de Jordan et une base de Jordan pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) En déduite e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 10. Brouillon : $\chi_A(X) = -X^5$ et

$$E_0 = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0))$$

il y a donc deux blocs de Jordan. Or

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $A^3 = 0$, le polynôme minimal est donc X^3, donc la plus grande taille d'un bloc de Jordan est 3. Ainsi on doit trouver $J = \mathrm{diag}(J_3(0), J_2(0))$. Maintenant il faut trouver une base de Jordan ... (voir l'exercice précédent ...).

Endomorphismes nilpotents

Exercice 11. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On suppose que $AN = NA$. Démontrer que $\det(A+N) = \det(A)$.

Solution de l'exercice 11. On commence par écrire que $A+N = A\left(I_n + A^{-1}N\right)$ et donc il suffit de prouver que $\det\left(I_n + A^{-1}N\right) = 1$. Pour cela, nous allons prouver que la matrice $A^{-1}N$ est nilpotente. En effet, puisque A et N commutent, donc que A^{-1} et N commutent, on a

$$\left(A^{-1}N\right)^p = A^{-p}N^p = 0$$

dès que $N^p = 0$. Ainsi, $A^{-1}N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (que des zéros sur la diagonale). On en déduit que $I_n + A^{-1}N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que

$$\det\left(I_n + A^{-1}N\right) = 1$$

ce qui implique le résultat voulu.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si, pour tout $p \geq 1$, on a $\mathrm{Tr}\,(A^p) = 0$.

Solution de l'exercice 12. Un sens est facile. Si A est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et sa trace est nulle. Comme chaque A^p pour $p \geq 1$ est nilpotente, on a bien prouvé l'implication directe.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Tr}\,(A^p) = 0$ pour tout $p \geq 1$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes non-nulles de A, de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

La trigonalisation de A montre que, pour tout $p \geq 1$, les valeurs propres de A^p sont $\lambda_1^p, \ldots, \lambda_m^p$, de multiplicité respective $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Écrivons le système obtenu en écrivant les conditions $\mathrm{Tr}\,(A^p) = 0$ pour $p = 1, \ldots, m$. On obtient

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m = 0 \\ \alpha_1\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_m\lambda_m^2 = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_1\lambda_1^m + \cdots + \alpha_m\lambda_m^m = 0 \end{cases}$$

Puisque tous les λ_i sont non nuls et distincts deux à deux, on obtient un système de Vandermonde inversible, et on en déduit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Donc A n'admet aucune valeur propre non nulle. Elle est donc nilpotente (puisque semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte).

Exercice 13. Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

(1) Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^kB - BA^k = kA^k$.

(2) On considère

$$\begin{aligned} \phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto MB - BM. \end{aligned}$$

Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(3) Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B.

(4) En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

Solution de l'exercice 13. 1. On va procéder par récurrence sur k. La propriété est vraie si $k = 0$ ou si $k = 1$. Soit un entier $k \geq 1$ tel que la propriété est vraie. Multiplions alors cette égalité à gauche par A. On trouve

$$A^{k+1}B - ABA^k = kA^{k+1}.$$

De même, multiplions à droite par A^k l'égalité $AB - BA = A$. Il vient :

$$ABA^k - BA^{k+1} = A^{k+1}.$$

Si on somme les deux inégalités obtenues, on obtient immédiatement que la propriété est aussi vraie au rang $k+1$.

2. La vérification est immédiate et laissée au lecteur.

3. Il suffit de remarquer que le résultat de la question 1. entraîne que A^k est un vecteur propre de ϕ_B associé à la valeur propre k.

4. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie n^2, ϕ_B admet au plus un nombre fini de valeurs propres distinctes. Or, si $A^k \neq 0, k$ est une valeur propre de ϕ_B. Il existe donc un nombre fini d'entiers k tels que $A^k \neq 0$. En particulier, il existe au moins un entier k avec $A^k = 0$.

Systèmes différentiels

Exercice 14. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le polynôme minimal de A.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
(c) Calculer e^A.
(d) En déduire la solution générale du système $X'(t) = AX(t)$.

Solution de l'exercice 14. (a) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-2)(X+1)^2$, $E_2(A) = \text{Vect}\{\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et $E_{-1}(A) = \text{Vect}\{\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.
La matrice est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) On en déduit que son polynôme minimal est $\mu_A(\lambda) = (X-2)(X+1)$.

(c) Par division euclidienne de X^n par $\mu_A(X)$ on a $X^n = (X-2)(X+1)Q(X) + \alpha X + \beta$. On évalue cette égalité en 2 et -1 et on trouve

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

et

$$e^{tA} = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} A + \frac{2e^{-t} + e^{2t}}{3} I_3$$

(d) La solution générale du système $X'(t) = AX(t)$ est donc $X(t) = e^{tA}V$ avec $V \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 15. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1'(t) &= (2-t)x_1(t) + (t-1)x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2(1-t)x_1(t) + (2t-1)x_2(t) \end{cases}$$

Solution de l'exercice 15. Le système peut se mettre sous la forme $X'(t) = A(t)X(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $A(t)$ est $\chi_{A(t)}(X) = X^2 - (t+1)X + t$ et $\text{Sp}_{A(t)} = \{1, t\}$.

Si $t \neq 1$, alors $A(t)$ admet deux valeurs propres distinctes et par conséquent elle est diagonalisable,

$$E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_t = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A(t) = PD(t)P^{-1}, \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

cette relation est aussi vraie pour $t = 1$.

En posant $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Y(t) = P^{-1}X(t)$, on a

$$X'(t) = A(t)X(t) \iff Y'(t) = D(t)Y(t)$$

$$\iff \begin{cases} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= ty_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 &= \lambda e^t \\ y_2 &= \mu e^{t^2/2} \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On trouve alors comme solution générale cherchée

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 2e^{t^2/2} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} y'(t) &= x(t) \\ z'(t) &= x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

Solution de l'exercice 16. Le système est de la forme $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

Le spectre de A est $\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$. Comme A admet trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. On trouve

$$E_{-1}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_0(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_2(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on a $X' = AX \iff Y' = DY \iff Y(t) = e^{tD}V$ avec $V = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$. La solution générale du système est donc

$$X(t) = PY(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Exercice 17. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= y(t) + t \\ z'(t) &= 2z(t) \end{cases}$$

Solution de l'exercice 17. Le système est de la forme $X' = AX + B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

La matrice A n'est pas diagonalisable. Elle est triangulaire supérieure par blocs. Le premier bloc est $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente, $N^2 = 0$. Par conséquent $e^{tC} = e^t[I_2 + tN]$ et

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^{(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour tout $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$,

$$X_H(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^t + \mu t e^t \\ \mu e^t \\ \nu e^{2t} \end{pmatrix}$$

est solution du système homogène. Une solution particulière du système non-homogène est donnée par

$$X_P(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) ds$$

Or

$$e^{(t-s)A} B(s) = \begin{pmatrix} e^{t-s} & (t-s)e^{t-s} & 0 \\ 0 & e^{t-s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(t-s)r^{t-s} \\ se^{t-s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple donne

$$\int_0^t s(t-s)e^{t-s} ds = e^t(t-2) + t + 2, \quad \int_0^t s^{t-s} ds = e^t - t - 1.$$

Il s'ensuit que

$$Y_P(t) = \begin{pmatrix} e^t(t-2) + t + 2 \\ e^t - t - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $X_H(t) + X_P(t)$ (c' est la solution qui passe par lorsque $t = 0$ par (λ, μ, ν))

Exercice 18. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= 10x(t) - 5y(t) + 7z(t) \\ z'(t) &= 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

Solution de l'exercice 18. Le système est de la forme $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 1)$. Cette matrice n'est pas diagonalisable. Elle est triangularisable, $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $Y = P^{-1}X$, donc $X' = AX \iff Y' = TY \iff Y(t) = e^{tT}V$ avec $V = \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \\ \mu \end{pmatrix}$. D'où

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu t + \nu \\ \mu \end{pmatrix}$$

La solution générale du système est donc

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Exercice 19. On se propose de résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) - 3x_3(t) - 3x_4(t) - 3x_5(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_3(t) + x_4(t) + x_5(t) \\ x_4'(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + 2x_4(t) + 3x_5(t) \\ x_5'(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) - x_4(t) - 2x_5(t) \end{cases}$$

Soit A la matrice du système,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que χ_A est scindé.

(2) Calculer la réduite de Jordan J de A et une matrice inversible P telle que $A = PJP^{-1}$.

(3) Calculer e^{tJ}, puis e^{tA}, pour $t \in \mathbb{R}$.

(4) En déduire la solution générale du système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

Solution de l'exercice 19. (1) On trouve $\chi_A : \chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2$.

(2) Pour la valeur propre 1 (de multiplicité 3) :

Notons $M = A - I_5$. Donc

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 20 \\ -12 & -12 & -12 & -12 & -20 \end{pmatrix}$$

M est de rang 4, donc le sous-espace propre $E_1(A) = Ker(A - I)$ est de dimension 1. M^3 est de rang 2 donc le sous-espace caractéristique $N_1(A) = Ker(A - I)^3$ est de dimension 3.

On choisit un vecteur v_3 tel que $M^3v_3 = 0$ et $M^2v_3 \neq 0$, par exemple $v_3 = (0,0,1,-1,0)^\top$, puis on définit $v_2 = Av_3 = (0,1,-1,0,0)^\top$, $v_1 = A^2v_3 = (1,-1,0,0,0)^\top$. La famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $N_1(A) = Ker(A - I)^3$.

Pour la valeur propre -1 (de multiplicité 2) :

Notons $N = A + \mathrm{I}_5$. On a

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 & -9 & -9 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N est de rang 4 donc le sous-espace propre $E_{-1}(A) = \mathrm{Ker}(A+I)$ est de dimension 1. N^2 est de rang 3, donc le sous-espace caractéristique $N_{-1}(A) = \mathrm{Ker}(A+I)^2$ est de dimension 2.

On choisit un vecteur v_5 tel que $N^2v_5 = 0$ et $Nv_5 \neq 0$, par exemple $v_5 = (1,0,0,1,-1)^\top$, puis on définit $v_4 = Av_5 = (0,0,0,1,-1)^\top$.

La famille (v_4, v_5) est une base de $N_{-1}(A) = \mathrm{Ker}(A+I)^2$.

D'après le lemme des noyaux, $\mathbb{R}^5 = \mathrm{Ker}(A-I)^3 \oplus \mathrm{Ker}(A+I)^2$, donc la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est une base de $\mathbb{R}^5$.

La matrice de l'endomorphisme associé à A dans la base $\mathcal{B}$ est donc $J = \begin{pmatrix} J_3(1) & 0 \\ 0 & J_2(-1) \end{pmatrix}$, la réduite de Jordan de A. Ainsi $A = PJP^{-1}$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) On a

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_3(1)} & 0 \\ 0 & e^{tJ_2(-1)} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
e^{tJ_3(1)} &= e^{tI_3+tJ_3(0)} = e^{tI_3}e^{tJ_3(0)} \qquad \text{car } I_3J_3(0) = J_3(0)I_3 \\
&= e^t(I_3 + tJ_3(0) + \frac{t^2}{2}J_3(0)^2) \\
&= e^t \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{tJ_2(-1)} &= e^{-tI_2+tJ_2(0)} = e^{-tI_2}e^{tJ_2(0)} \qquad \text{car } I_2J_2(0) = J_2(0)I_2 \\
&= e^{-t}(I_2 + tJ_2(0)) \\
&= e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & t^2e^t/2 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= Pe^{tJ}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^t+e^{-t} & e^{-t}(-1-t)e^t & e^t(-\frac{1}{2}t^2-t-1)+e^{-t} & e^t(-\frac{1}{2}t^2-t-1)+e^{-t} \\ 0 & e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & 0 & e^t & te^t & te^t \\ te^{-t} & te^{-t} & te^{-t} & e^t+te^{-t} & e^t+(t-1)e^{-t} \\ -te^{-t} & -te^{-t} & -te^{-t} & -te^{-t} & e^t+(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(5) La solution générale du système différentiel est donc

$$
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix}
$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$.