Algèbre linéaire 2 – Feuille 4
Réduction des d'endomorphismes diagonalisables

Éléments propres, diagonalisation

Exercice 1. Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces matrices,
calculer le polynômes caractéristique,
déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres,
dire si la matrice est diagonalisable et si oui la diagonaliser.

Exercice 2. Les matrices réelles suivantes sont-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisation des matrices avec paramètres

Exercice 3. Déterminer pour quelles valeurs des réels a, b et c la matrice A suivante est diagonalisable,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Déterminer pour quelles valeurs des réels a, b et c la matrice A suivante est diagonalisable,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

(1) Quel est le rang de A ? En déduire le polynôme caractéristique de A, puis le spectre de A.

(2) Donner une condition sur a pour que A soit diagonalisable.

Exercice 6. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

En distinguant trois cas, étudier si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

(1) On suppose a réel, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? (sans calculs).

(2) Déterminer le rang de A.

(3) Donner la raison pour laquelle le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$X^2 (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$$

avec λ_1, λ_2 appartenant à $\mathbb{C}^*$ et vérifiant

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a \text{ et } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a^2 + 6.$$

(4) Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de A dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2$.

(5) En déduire les valeurs de a pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Exercice 8. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

où a et b sont des réels.

(1) Trouver les valeurs propres de A.

(2) Trouver les sous-espaces propres de A et montrer que A est diagonalisable.

(3) Diagonaliser A.

Exercice 9. Soient a, b, c, d quatre nombres complexes avec $a^2 + b^2 \neq 0$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

(1) Calculer $A^\top A$, $\det A$ et montrer que $\operatorname{rg}(A) = 2$ ou 4 .

(2) On pose $\alpha^2 = b^2 + c^2 + d^2$ supposé non nul. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 10. Déterminer les les nombres complexes z pour lesquels la matrice suivante est diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Diagonalisation des matrices $n \times n$

Exercice 11. Pour $n \geq 3$, on considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(2) Application : Exprimer

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

Exercice 12. Soient $n \geq 2$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le rang de A. En déduire que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

(2) Déterminer deux vecteurs propres non colinéaires et en déduire que A est diagonalisable.

Diagonalisation et sous-espaces stables

Exercice 13. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E.

(1) On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E stable par f tel que $\dim F = 1$.
Montrer que f admet au moins une valeur propre réelle.

(2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F et G sont distincts, stables par f et de dimension 2.
Montrer que f possède au moins une valeur propre réelle.

(3) Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par f tels que $F \cap G \cap H = \{\mathbf{0}\}$.

(a) Montrer que les sous-espaces vectoriels $F \cap G, G \cap H$ et $H \cap F$ sont stables par f.

(b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 14. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Trouver les sous espaces stables par f dans chacun des cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisation et polynômes annulateurs

Exercice 15. Soit la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que J est diagonalisable.
(Trouver pour cela un polynôme annulateur ...)

Exercice 16. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R}).$$

En procédant à un calcul par blocs, déterminer $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_5$. En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.

Exercice 17. Soient $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mathcal{M}_5(\mathbb{C}).$$

(1) Trouver le polynôme minimal de A.
(2) Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 18. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\varphi(M) = AM + MA.$$

Trouver une relation entre φ, φ^2 et φ^3. En déduire l'endomorphisme φ est diagonalisable.

Exercice 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 + A^\top = I_n.$$

(1) Montrer A inversible si, et seulement si, $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
(2) Montrer que la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs

$$A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer A^2.
(2) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres de A et les dimensions de ses espaces propres ?

Exercice 21. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice de permutation s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer qu'une matrice de permutation est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 22. Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(1) Démontrer que si λ est une valeur propre complexe de A de multiplicité s, alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A de multiplicité s.
(2) On suppose que $A^3 - A^2 + A - I = 0$. Montrer que $\det(A) = 1$.
(3) On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
(4) On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.
(5) On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Démontrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}^-$.

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 = A^2 \text{ et } \mathrm{tr}(A) = n.$$

Montrer que $A = I_n$.

Réduction des endomorphismes de $\mathbb{K}_n[X]$

Exercice 24. (1) Montrer que Φ, qui à P associe

$$\left(X^2 - 1\right) P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
(2) Résoudre l'équation différentielle

$$y' = \left(\frac{5+\lambda}{2(x-1)} + \frac{3-\lambda}{2(x+1)} \right) y.$$

(3) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 25. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$.

(1) Montrer que

$$\phi(P)(X) = (X-a)\left(P'(X) - P'(a)\right) - 2(P(X) - P(a))$$

définit. un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) A l'aide de la formule de Taylor, déterminer l'image et le noyau de ϕ.

(3) Trouver ses éléments propres.

L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 26. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = P - (X+1)P'.$$

(1) Justifier que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Déterminer les valeurs propres de φ et justifier que φ est diagonalisable.

Exercice 27. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et deux réels $a \neq b$.
Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP.$$

(1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

(2) Déterminer les valeurs propres de φ et en déduire que φ est diagonalisable.

Applications

Exercice 28. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$, lorsque A est l'une des matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 29. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 30. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par $u_0 = 0, v_0 = 22, w_0 = 22$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(2u_n + v_n + w_n\right) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + v_n + w_n\right). \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_n + v_n + 2w_n\right) \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n, w_n et étudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 31. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(a) Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $M^2 + M = A$. Justifier que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

(c) Déterminer les solutions de l'équation $M^2 + M = A$.

Exercice 32. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P.

(2) Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = A$.

Exercice 33. Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?