Algèbre linéaire 2 – Feuille 4

Réduction des d'endomorphismes diagonalisables

Éléments propres, diagonalisation

Exercice 1. Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \ A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces matrices,
calculer le polynômes caractéristique,
déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres,
dire si la matrice est diagonalisable et si oui la diagonaliser.

Solution de l'exercice 1. (1) Valeurs propres : $\chi_{A_1}(X) = (1-X)(2-X)(4+X)$, $\mathrm{Sp}(A_1) = \{-4, 1, 2\}$.

Diagonalisabilité : Le polynôme caractéristique de A_1 est scindé à racines simples donc A_1 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Sous-espaces propres : $E_1(A_1) = \mathbb{R}(1,1,1)^\top$, $E_2(A_1) = \mathbb{R}(2,3,-2)^\top$ et $E_{-4}(A_1) = \mathbb{R}(4,-3,2)^\top$.

Diagonalisation : Comme A_1 est diagonalisable, on a $A_1 = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Valeurs propres : $\chi_{A_2}(X) = -(X-1)(X-2)^2$, $\mathrm{Sp}(A_2) = \{1, 2\}$.

Sous-espaces propres : $E_1(A_2) = \mathbb{R}(1, 1-1)^\top$, $E_2(A_2) = \mathbb{R}(1,0,1)^\top \oplus \mathbb{R}(0,2,-3)^\top$.

Diagonalisabilité : Comme χ_{A_2} est scindé sur $\mathbb{R}$ $m(1) = d(1)$ et $m(2) = d(2)$, la matrice A_2 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Diagonalisation : On a $A_2 = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Valeurs propres : $\chi_{A_3}(X) = -(X-1)^2(X-2)$, $\mathrm{Sp}(A_3) = \{1, 2\}$.

Sous-espaces propres : $E_1(A_3) = \mathbb{R}(1,0,-1)^\top \oplus \mathbb{R}(0,1,1)^\top$, $E_2(A_3) = \mathbb{R}(0,0,1)^\top$.

Diagonalisabilité : Comme χ_{A_3} est scindé sur $\mathbb{R}$ et que $m(1) = d(1)$ et $m(2) = d(2)$, la matrice A_3 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Diagonalisation : On a $A_3 = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) On trouve $\chi_{A_5}(X) = X^3(X-10)$. Les sous-espace propres sont $E_0(A_5) = \mathrm{Vect}((1,0,0,-1)^\top, (0,1,0,-1)^\top, (0,0,1,-1)^\top)$ pour la vp 0 et $E_{10}(A_5) = \mathrm{Vect}((1,2,3,4)^\top)$ pour la vp 10. Comme $\dim E_0(A_5) + \dim E_{10}(A_5) = 4$, la matrice est diagonalisable et elle est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) $\chi_{A_4}(X) = (X+2)(X-2)^3$.
$E_{-2}(A_4) = \mathrm{Vect}((1,-1,-1,-1)^\top)$ et
$E_2(A_4) = \mathrm{Vect}((1,0,0,1)^\top, (0,1,0,-1)^\top, (0,0,1,-1)^\top)$

χ_{A_4} est scindé et $\dim E_{-2}(A_4) + \dim E_2(A_4) = \dim \mathbb{R}^4$, donc A_4 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et elle est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(6) $\chi_{A_6}(X) = (X-1)^2(X-2)^2$.
$E_1(A_6) = \mathrm{Vect}((0,1,0,0)^\top, (0,0,1,-1)^\top)$ et
$E_2(A_6) = \mathrm{Vect}((1,0,0,0)^\top, (0,0,1,-2)^\top)$

χ_{A_4} est scindé et $\dim E_1(A_6) + \dim E_2(A_6) = \dim \mathbb{R}^4$, donc A_6 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Les matrices réelles suivantes sont-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 2. (1) Valeurs propres : $\chi_{A_1}(X) = -(X-1)^2(X+2)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 1\}$.

Sous-espaces propres : $E_1(A_1) = \mathbb{R}(1,-2,-4)^\top$ et $E_2(A_1) = \mathbb{R}(0,0,1)^\top$.

Diagonalisabilité : Comme $d(2) \neq m(2)$, la matrice A_1 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (ni sur $\mathbb{C}$).

(2) Valeurs propres : $\chi_{A_2}(X) = -(X-1)^3$, $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.

Sous-espaces propres : $E_1(A_2) = \mathbb{R}(1,1,0)^\top \oplus \mathbb{R}(0,0,1)^\top$.

Diagonalisabilité : Comme $3 = m(1) \neq d(1) = 2$ la matrice A_2 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (ni sur $\mathbb{C}$).

On peut aussi raisonner sans avoir à calculer les sous-espaces propres : si A_2 était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres (ici 1) , c-à-d à I_3, et par conséquent elle serait égale à I_3, ce qui n'est pas le cas.

(3) Valeurs propres : $\chi_{A_3}(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$, $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

Sous-espaces propres : $E_2(A_3) = \mathbb{R}(1,1,0)^\top$, .

Diagonalisabilité : $E_2(A_3)$ étant de dimension 1 et $m(2) = 2$, la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ni sur $\mathbb{C}$).

(4) Valeurs propres dans $\mathbb{R}$: $\chi_{A_4}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2+1)$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_4) = \{1\}$.

Diagonalisabilité dans $\mathbb{R}$: Puisque χ_{A_4} n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A_4 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Valeurs propres dans $\mathbb{C}$: On a $\chi_{A_4}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2+1) = -\lambda(\lambda-i)(\lambda+i)$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, i, -i\}$.

Diagonalisabilité dans $\mathbb{C}$: Comme χ_{A_4} est scindé simple à racines complexes, la matrice A_4 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Sous-espaces propres : $E_0(A_3) = \mathbb{C}(1,0,1)^\top$, $E_i(A_4) = \mathbb{C}(i,-i,1)^\top$, $E_{-i}(A_4) = \mathbb{C}(-i,i,1)^\top$.

Diagonalisation dans $\mathbb{C}$: On a $A_4 = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & -i & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

(5) $\chi_{A_5}(\lambda) = \lambda(\lambda+3)(\lambda-2)^2$, $\mathrm{Sp}(A_5) = \{-3, 0, 2\}$.

Les sous-espaces propres des valeurs propres 0 et -3 sont nécessairement de dimension 1. Pour celui de la valeur propre 2 on trouve $E_2(A_5) = \mathbb{R}(1,0,-1,-1)^\top$, donc de dimension 1. Comme 2 est de multiplicité deux, A_5 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (ni dans $\mathbb{C}$).

Diagonalisation des matrices avec paramètres

Exercice 3. Déterminer pour quelles valeurs des réels a, b et c la matrice A suivante est diagonalisable,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 3. Si on calcule le polynôme caractéristique de A, on obtient : $\chi_A(x) = (-1)^2 \det(A - x.I_2) = x^2 - ab$.

Il est nécessaire que χ_A soit scindé sur $\mathbb{R}$ pour que A soit diagonalisable, donc il faut que : $ab \leq 0$.

Réciproquement, si : $ab \leq 0$, distinguons deux cas :

- $ab < 0$: dans ce cas χ_A admet deux racines réelles simples et A est diagonalisable,

- $ab = 0$: alors A admet 0 comme valeur propre double. Dans ce dernier cas, si A est diagonalisable, alors est semblable à la matrice nulle, donc égale à la matrice nulle, et : $a = b = 0$.

Et si : $a = b = 0$, alors A est nulle donc diagonalisable (puisque déjà diagonale).

Conclusion : A soit diagonalisable si et seulement si $ab < 0$, ou $a = b = 0$.

Exercice 4. Déterminer pour quelles valeurs des réels a, b et c la matrice A suivante est diagonalisable,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 4. On remarque déjà que si $c = 1$, alors la matrice n'est pas diagonalisable. En effet, dans ce cas $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)^3$ donc 1 est la seule valeur propre de A. Mais si A était diagonalisable, on aurait alors l'existence d'une matrice P inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = I_3,$$

ce qui n'est pas car A n'est pas l'identité.

On suppose désormais que $c \neq 1$. On sait d'après le cours que l'espace propre E_c est de dimension 1 car le polynôme caractéristique de la matrice est

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-c)$$

et $1 \leq d(c) \leq m(c) = 1$. La matrice A est donc diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(A) + \dim E_c(A) = 3$, c'est à dire si $\dim E_1(A) = 2$. Maintenant, on remarque que la matrice $A - I_3$ s'écrit de manière très simple

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}$$

et calculer son noyau $E_1(A)$ est aisé : comme $c-1$ n'est pas nul il est de dimension 2 si et seulement si a est nul.

On peut donc conclure : la matrice A est diagonalisable si et seulement si $c \neq 1$ et $a \neq 0$.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

(1) Quel est le rang de A ? En déduire le polynôme caractéristique de A, puis le spectre de A.

(2) Donner une condition sur a pour que A soit diagonalisable.

Solution de l'exercice 5. Il est claire que $\operatorname{rang}(A) = 1$, donc $\dim \operatorname{Ker}(A) = 3$ et par suite 0 est valeur propre de multiplicité au moins 3. On en déduit que $\chi_A(X) = X^3(X-\lambda) = X^4 - \lambda X^3$. D'après l'expression général du polynôme caractéristique on a $\lambda = \operatorname{Tr}(A) = 2a+2$. Ainsi $\chi_A(X) = X^3(X-(2a+2))$ et $\operatorname{Sp}(A) = \{0, 2a+2\}$.

– Si $a = -1$ alors $\chi_A(X) = X^4$ et 0 est la seule valeur propre (de multiplicité 4). Si A était diagonalisable alors elle serait semblable à la matrice nulle et serait nulle ce qui n'est pas le cas.

– Si $a \neq -1$, alors A admet deux valeurs propres : 0 de multiplicité 3 et $2(a+1)$ de multiplicité 1. On sait par avance que $\dim E_{2(a+1)}(A) = 1$ et d'ailleurs cet espace est engendré par $(a,1,1,a)^\top$. Pour que A soit diagonalisable il faut que $\dim E_0(A) = 3$ ce qui est le cas puisque $\operatorname{rang}(A) = 1$. On trouve d'ailleurs

$$\dim E_0(A) = \operatorname{Vect}(1,-1,0,0)^\top, (10,-1,0)^\top, (1,0,0,-1)^\top)$$

Ainsi A est diagonalisable si et seulement si $a \neq -1$ et dans ce cas $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2(a+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

En distinguant trois cas, étudier si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 6. Le polynôme caractéristique de A vaut : $\chi_A(x) = x^3 + (ab+bc+ca)x$ (on peut par exemple appliquer la règle de Sarrus).

En effet, en sommant toutes les lignes on constate que : $\operatorname{rg}(A) \leq 2$, et donc 0 est valeur propre de A : on peut ainsi développer directement le déterminant.

Distinguons alors trois cas :

- si : $ab+bc+c.a > 0$, alors χ_A n'étant pas scindé sur $\mathbb{R}$, A ne peut être diagonalisable.

- si : $ab+bc+ca = 0$, alors χ_A admet une unique racine (triple) qui vaut 0. Dans ce cas, si A est diagonalisable, alors A est semblable à la matrice nulle, donc A est nulle, et $a = b = c = 0$.

Réciproquement, si : $a = b = c = 0, A$ est nulle donc évidemment diagonalisable.

- si : $ab+bcc+ca < 0$, alors χ_A admet alors trois racines réelles distinctes et A est diagonalisable.

Exercice 7. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

(1) On suppose a réel, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? (sans calculs).

(2) Déterminer le rang de A.

(3) Donner la raison pour laquelle le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$X^2\left(X-\lambda_1\right)\left(X-\lambda_2\right)$$

avec λ_1, λ_2 appartenant à $\mathbb{C}^*$ et vérifiant

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a \text{ et } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a^2 + 6.$$

(4) Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de A dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2$.

(5) En déduire les valeurs de a pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Solution de l'exercice 7. (1) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (résultat admis).

(2) $\operatorname{rg} A = 2$.

(3) Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$ et unitaire. Puisque $\dim \operatorname{Ker} A = 2$ on déduit que 0 est valeur propre au moins double de A et donc

$$\chi_A = X^2 (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

La matrice A a pour valeurs complexes $0, 0, \lambda_1$ et λ_2 et on a

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ et } \operatorname{tr} A^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

et donc :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a \text{ et } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a^2 + 6.$$

Enfin $\lambda_1 \neq 0$ car sinon $\lambda_2 = a$ et $\lambda_2^2 = a^2 \neq a^2 + 6$. De même $\lambda_2 \neq 0$.

(4) Si $\lambda_1 = \lambda_2$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = a/2$ et $a^2/2 = a^2 + 6$ donc $a = \pm \mathrm{i}2\sqrt{3}$.

Le sous-espace propre de la valeur propre $a/2$ est

$$\operatorname{Vect}(1, a/2, 1, 1)^\top$$

(5) Finalement, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $a \neq \pm \mathrm{i}2\sqrt{3}$.

Exercice 8. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

où a et b sont des réels.

(1) Trouver les valeurs propres de A.

(2) Trouver les sous-espaces propres de A et montrer que A est diagonalisable.

(3) Diagonaliser A.

Solution de l'exercice 8. **(1) Valeurs propres :** On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a^2-\lambda & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2-\lambda & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (a+b)^2-\lambda & ab & ab & b^2 \\ (a+b)^2-\lambda & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ (a+b)^2-\lambda & b^2 & a^2-\lambda & ab \\ (a+b)^2-\lambda & ab & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \\
&= ((a+b)^2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a^2-ab-\lambda & b^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & b^2-ab & a^2-ab-\lambda & ab-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= ((a+b)^2-\lambda) \begin{vmatrix} a^2-ab-\lambda & b^2-ab & ab-b^2 \\ b^2-ab & a^2-ab-\lambda & ab-b^2 \\ 0 & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= ((a+b)^2-\lambda)(a^2-b^2-\lambda) \begin{vmatrix} a^2-ab-\lambda & b^2-ab \\ b^2-ab & a^2-ab-\lambda \end{vmatrix} \\
&= ((a+b)^2-\lambda)(a^2-b^2-\lambda) \begin{vmatrix} (a-b)^2-\lambda & (a-b)^2-\lambda \\ b^2-ab & a^2-ab-\lambda \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\
&= ((a+b)^2-\lambda)(a^2-b^2-\lambda)((a-b)^2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2-ab & a^2-ab-\lambda \end{vmatrix} \\
&= ((a+b)^2-\lambda)((a-b)^2-\lambda)(a^2-b^2-\lambda)(a^2-b^2-\lambda)
\end{aligned}$$

Donc

$$\chi_A(\lambda) = ((a+b)^2-\lambda)((a-b)^2-\lambda)(a^2-b^2-\lambda)^2$$

et

$$\operatorname{Sp}(A) = \{(a+b)^2, (a-b)^2, a^2-b^2\}.$$

(2) Sous-espaces propres : On trouve

$$\begin{aligned}
E_{(a+b)^2}(A) &= \mathbb{R}(1,1,1,1)^\top \\
E_{(a-b)^2}(A) &= \mathbb{R}(1,-1,-1,1)^\top \\
E_{a^2-b^2}(A) &= \mathbb{R}(1,0,0,-1)^\top \oplus \mathbb{R}(0,1,-1,0)^\top
\end{aligned}$$

(3) Diagonalisabilité : Comme $\dim E_{(a+b)^2}(A) + \dim E_{(a-b)^2}(A) + \dim E_{a^2-b^2}(A) = 4$, la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(4) Diagonalisation : On a $A = PD(a,b)P^{-1}$ avec

$$D(a,b) = \operatorname{diag}\left((a+b)^2, (a-b)^2, a^2-b^2, a^2-b^2\right)$$

et

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&-1&0&1\\1&-1&0&-1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}$$

Exercice 9. Soient a,b,c,d quatre nombres complexes avec $a^2+b^2\neq 0$ et soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\-b&a&-d&c\\-c&d&a&-b\\-d&-c&b&a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

(1) Calculer $A^\top A$, $\det A$ et montrer que $\operatorname{rg}(A)=2$ ou 4 .

(2) On pose $\alpha^2=b^2+c^2+d^2$ supposé non nul. Montrer que A est diagonalisable.

Solution de l'exercice 9. (a) On obtient

$$A^\top A=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)I_4$$

et donc $(\det A)^2=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4$. Or, relativement à la variable a, $\det A$ est une fonction polynômiale de degré 4 dont le terme dominant est a^4 (obtenu par le produit des coefficients diagonaux.) On en déduit que

$$\det(A)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2.$$

Si $a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0$ alors $\operatorname{rg}(A)=4$.
Si $a^2+b^2+c^2+d^2=0$ alors $\operatorname{rg}(A)\leq 3$. Or $a^2+b^2\neq 0$ donc la sous matrice $\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ est de rang 2 et donc $\operatorname{rg}(A)\geq 2$. On observe de plus que

$$C_3=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}C_1+\frac{bc-ad}{a^2+b^2}C_2$$

et

$$C_4=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}C_1+\frac{bd+ac}{a^2+b^2}C_2$$

done $\operatorname{rg}(A)=2$.

(2) Par la formule obtenue ci-dessus,

$$\chi_A=\left((a-X)^2+b^2+c^2+d^2\right)^2=\left((a-X)^2+\alpha^2\right)^2$$

avec $\alpha=b^2+c^2+d^2$.

Les valeurs propres de A sont $a+\alpha$ et $a-\alpha$.

Par l'étude qui précède $\operatorname{rg}(A-(a+\alpha)\mathrm{Id})=2$ et $\operatorname{rg}(A-(a-\alpha)\mathrm{Id})=2$ donc

$$\dim E_{a+\alpha}(A)=\dim E_{a-\alpha}(A)=2$$

et par suite A est diagonalisable.

Exercice 10. Déterminer les les nombres complexes z pour lesquels la matrice suivante est diagonalisable

$$A=\begin{pmatrix}0&0&z\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Solution de l'exercice 10. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X)=X^3-zX-z.$$

Celui-ci admet trois racines complexes comptées avec multiplicité. Recherchons pour quel z le polynôme χ_A admet une racine multiple.

Les racines multiples d'un polynôme sont les racines communes à celui-ci et à son polynôme dérivé.

On a $(\chi_A)'(x)=3X^2-z$. Si x est une racine de $(\chi_A)'$, on a

$$\chi_A(x)=-\frac{2}{3}zx-z=0\Longleftrightarrow x=-\frac{3}{2}\text{ ou }z=0.$$

Notons que, pour $x=-3/2$, on obtient $z=3x^2=27/4$.

Ceci conduit à distinguer trois cas :

– Cas : $z=0$. La matrice A n'est pas diagonalisable car 0 est sa seule valeur propre et ce n'est pas la matrice nulle

– Cas : $z=27/4$. La matrice A présente une valeur propre double : $-3/2$. Or

$$\operatorname{rg}\left(A+\frac{3}{2}\mathrm{I}_3\right)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}3/2&0&27/4\\1&3/2&0\\1&1&3/2\end{pmatrix}=2$$

(il y a clairement une matrice inversible de taille 2 incluse dans la matrice dont on calcule le rang qui, par ailleurs, est assurément non inversible). On en déduit que l'espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 1 : la matrice A n'est pas diagonalisable.

– Cas : $z\neq 0$ et $z\neq 27/4$. La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car comporte trois valeurs propres distinctes.

Diagonalisation des matrices $n\times n$

Exercice 11. Pour $n \geq 3$, on considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(2) Application : Exprimer

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

Solution de l'exercice 11. (a) Por $x \in \mathbb{C}$, en développant selon la dernière ligne

$$\det(xI_n - J) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x^n - 1$$

J possède exactement n valeurs propres qui sont les racines n-ième de l'unité $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ avec $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

(b) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ la matrice de passage telle que $J = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} = a_0 \mathrm{I}_n + a_1 J + a_2 J^2 + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$$

donc

$$P^{-1}AP = a_0 I_n + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_{n-1} D^{n-1} = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_i^k\right)_{0 \leq i \leq n-1}$$

puis

$$\det(A) = \det\left(P^{-1}AP\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_i^k\right)$$

Exercice 12. Soient $n \geq 2$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le rang de A. En déduire que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

(2) Déterminer deux vecteurs propres non colinéaires et en déduire que A est diagonalisable.

Solution de l'exercice 12. (1) A ne possède que deux colonnes différentes donc $\mathrm{rg}\, A \leq 2$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \neq 0$$

donc $\mathrm{rg}(A) = 2$. Par le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}\, A = 2n - 2$ donc 0 est valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé est $2n - 2$.

(2) Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^\top$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}^\top$ sont vecteurs propres associées aux valeurs propres non nulles $n(a+b)$ et $n(a-b)$. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $2n$ donc A est diagonalisable.

Diagonalisation et sous-espaces stables

Exercice 13. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E.

(1) On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E stable par f tel que $\dim F = 1$.
Montrer que f admet au moins une valeur propre réelle.

(2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F et G sont distincts, stables par f et de dimension 2.
Montrer que f possède au moins une valeur propre réelle.

(3) Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par f tels que $F \cap G \cap H = \{\mathbf{0}\}$.

(a) Montrer que les sous-espaces vectoriels $F \cap G, G \cap H$ et $H \cap F$ sont stables par f.

(b) Montrer que f est diagonalisable.

Solution de l'exercice 13. 1) Soit ε, un vecteur non nul appartenant à F. Comme $\dim F = 1$, le vecteur ε est une base de F.

Puisque $f(\varepsilon) \in F$, il existe un réel λ tel que

$$f(\varepsilon) = \lambda\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon \neq \mathbf{0}$, le réel λ est une valeur propre de f.

2) Posons

$$F_1 = F \cap G.$$

Alors

$$f(F_1) \subset f(F) \subset F \text{ et } \quad f(F_1) \subset f(G) \subset G$$

Il s'ensuit que $f(F_1) \subset F \cap G$. Puisque $F_1 = F \cap G$, on déduit que

$$f(F_1) \subset F_1$$

Montrons ensuite que la dimension de $F_1 = F \cap G$ est égale à 1 . F et G étant distincts, la dimension de $F \cap G$ doit être égal à 0 ou 1. Supposons par l'absurde qu'elle soit égale à 0 . On déduirait

$$\dim E \geq \dim(F, G) = \dim F + \dim G - \underbrace{\dim F \cap G}_{0} = 4$$

La dimension de E étant égale à 3 , ce résultat est absurde ; donc

$$\dim F_1 = \dim F \cap G = 1$$

Les résultats de la question 1 s'appliquent au sous-espace vectoriel $F_1 = F \cap G$.

Donc f admet au moins une valeur propre réelle.

3) (a) D'après les raisonnements de la question 2, les sous-espaces vectoriels $F \cap G, G \cap H$ et $H \cap F$ sont de dimension 1. Comme $f(F \cap G) \subset f(F) \subset F$ et $f(F \cap G) \subset f(G) \subset G$, on déduit

$$f(F \cap G) \subset F \cap G.$$

De la même manière, on obtient aussi :

$$f(G \cap H) \subset G \cap H \text{ et } f(H \cap F) \subset H \cap F.$$

(b) Les résultats de la questions 1 et 2 s'appliquent.

Il existe alors des vecteurs non nuls $\varepsilon_1 \in F \cap G, \varepsilon_2 \in G \cap H$ et $\varepsilon_3 \in H \cap F$ et des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$f(\varepsilon_1) = \lambda_1\varepsilon_1, f(\varepsilon_2) = \lambda_2\varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = \lambda_3\varepsilon_3$$

Montrons que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq 3}$ est une base de E. Soient des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 = \mathbf{0}$$

Puisque $\varepsilon_2 \in G \cap H, \varepsilon_3 \in H \cap F$, on déduit que les vecteurs $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ appartiennent à H. Comme $\alpha_1\varepsilon_1 = -\alpha_2\varepsilon_2 - \alpha_3\varepsilon_3$, il s'ensuit

$$\alpha_1\varepsilon_1 \in H$$

Dans ces conditions,

$$\alpha_1\varepsilon_1 \in F \cap G \cap H$$

L'hypothèse supposant $F \cap G \cap H = \{\mathbf{0}\}$, il s'ensuit que $\alpha_1\varepsilon_1 = \mathbf{0}$. Comme $\varepsilon_1 \neq \mathbf{0}$ donc $\alpha_1 = 0$ La symétrie des rôles joués par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ impliquent que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

D'où l'indépendance de $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq 3}$.

Etant libre et maximale dans $E, \mathcal{B}'$ est une base de E.

Comme la base $\mathcal{B}'$ est constituée de vecteurs propres de f, on conclut que f est diagonalisable

Exercice 14. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Trouver les sous espaces stables par f dans chacun des cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 14. 1) On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\left(X^2 - 2X\right) + (2-X) - (2-X)$$
$$= X(X-1)(X-2)$$

On est dans le cas d'une matrice diagonalisable avec 3 valeurs propres simples.

Recherche des droites stables : Dans chacun des cas, les droites stables sont les droites engendrées par des vecteurs propres. On obtient immédiatement les 3 droites stables : $E_0 = \operatorname{Vect}(e_1)$ où $e_1 = (1, -1, 0), E_1 = \operatorname{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (1, -1, -1)$ et $E_2 = \operatorname{Vect}(e_3)$ où $e_3 = (0, 1, 1)$.

Recherche des plans stables : Soit P un plan stable par f. La restriction de f à P induit un endomorphisme f_P de P et on sait de plus que le polynôme caractéristique de f_P divise celui de f. f_P est diagonalisable car f l'est (car on dispose d'un polynôme scindé à racines simples annulant f et donc f_P). On en déduit que P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de f_P qui sont encore vecteurs propres de f. On obtient trois plans stables : $P_1 = \mathrm{Vect}_2(e_2, e_3)$, $P_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ et $P_3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

2) On a

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} X-2 & -2 & -1 \\ -1 & X-3 & -1 \\ -1 & -2 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)\left(X^2-5X+4\right) + (-2X+2) - (X-1) \\ &= (X-1)((X-2)(X-4)-2-1) \\ &= (X-1)\left(X^2-6X+5\right) = (X-1)^2(X-5)\end{aligned}$$

Puis E_1 est le plan d'équation $x+2y+z=0$ et $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. On est toujours dans le cas diagonalisable mais avec une valeur propre double.

Les droites stables sont $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et n'importe quelle droite contenue dans E_1. Une telle droite est engendrée par un vecteur de la forme $(x, y, -x-2y)$ avec $(x,y) \neq (0,0)$.

Recherche des plans stables : Soit P un plan stable par f. f est diagonalisable et donc f_P est un endomorphisme diagonalisable de P. Par suite, P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de f. On retrouve le plan propre de f d'équation $x+2y+z=0$ et les plans engendrés par $(1,1,1)$ et un vecteur quelconque non nul du plan d'équation $x+2y+z=0$. L'équation générale d'un tel plan est $(-a-3b)x + (2a+2b)y + (b-a)z = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$.

3)On a

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} X-6 & 6 & -5 \\ 4 & X+1 & -10 \\ -7 & 6 & X-4 \end{vmatrix} \\ &= (X-6)\left(X^2-3X+56\right) - 4(6X+6) - 7(5X-55) \\ &= X^3 - 9X^2 + 15X + 25 \\ &= (X+1)\left(X^2-10X+25\right) = (X+1)(X-5)^2\end{aligned}$$

$E_{-1} = \mathrm{Vect}(10,15,4)$ et $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. On est dans le cas où A admet une valeur propre simple et une double mais n'est pas diagonalisable. Les droites stables par f sont les deux droites propres.

Recherche des plans stables : Soit P un plan stable par f. Le polynôme caractéristique de $\mathrm{f_P}$ est unitaire et divise celui de f. Ce polynôme caractéristique est donc soit $(X+1)(X-5)$ soit $(X-5)^2$. Dans le premier cas, f_P est diagonalisable et P est nécessairement le plan $\mathrm{Vect}((10,15,4)) + \mathrm{Vect}((1,1,1))$ c'est-à-dire le plan d'équation $11x - 6y - 5z = 0$.

Dans le deuxième cas, $\chi_{f_p} = (X-5)^2$ et 5 est l'unique valeur propre de f_p. Le théorème de Cayley-Hamilton montre que $(f_P - 5\mathrm{Id}_P)^2 = 0$ et donc P est contenu dans $\mathrm{Ker}\left((f-5\mathrm{Id})^2\right)$. Ainsi $\mathrm{Ker}\left((f-5\mathrm{Id})^2\right)$ est le plan d'équation $x = z$ qui est bien sûr stable par f car $(f-5\mathrm{Id})^2$ commute avec f.

Diagonalisation et polynômes annulateurs

Exercice 15. Soit la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que J est diagonalisable.
(Trouver pour cela un polynôme annulateur ...)

Solution de l'exercice 15. On peut aussi observer $J^2 = nJ$ et exploiter que $X(X-n)$ est un polynôme annulateur scindé simple de J. Donc J est diagonalisable.

Exercice 16. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R}).$$

En procédant à un calcul par blocs, déterminer $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_5$. En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.

Solution de l'exercice 16. Pour

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on vérifie $A_2^4 = I_2$ et $A_3^3 = I_3$. On en déduit $A^{12} = I_5$.

Puisque A annule le polynôme $X^{12} - 1$ scindé simple sur $\mathbb{C}[X]$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.

Exercice 17. Soient $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mathcal{M}_5(\mathbb{C}).$$

(1) Trouver le polynôme minimal de A.
(2) Montrer que A est diagonalisable.

Solution de l'exercice 17. (1) On calcule A^2 et on montre que $A^2 - 2aA + a^2 - b^2 = 0$. Donc le polynôme $X^2 - 2aX + a^2 - b^2 = (X-(a-b))(X-(a+b))$ est un polynôme annulateur de A. Comme $A \neq (a \pm b)I_5$, $\pi_A(X) = (X - (a-b))(X-(a+b))$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{a-b, a+b\}$.

(2) On remarque

$$\mathrm{rg}\,(A - (a+b)I_5) = 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}\,(A-(a-b)I_5) = 3$$

On en déduit

$$\dim \mathrm{Ker}\,(A - (a+b)\mathrm{I}_5) = 3 \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Ker}\,(A-(a-b)\mathrm{I}_6) = 2$$

La matrice A est donc diagonalisable semblable à $\mathrm{diag}\,((a+b)\mathrm{I}_3, (a-b)\mathrm{I}_2)$.

Exercice 18. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\varphi(M) = AM + MA.$$

Trouver une relation entre φ, φ^2 et φ^3. En déduire l'endomorphisme φ est diagonalisable.

Solution de l'exercice 18.

$\varphi^2(M) = A(AM+MA) + (AM+MA)A = AM + 2AMA + MA$ car $A^2 = A$.
$\varphi^3(M) = AM + 6AMA + MA$.

Par suite $\varphi^3(M) - 3\varphi^2(M) = -2AM - 2MA = -2\varphi(M)$.

Ainsi φ annule le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$.

Puisque ce polynôme est scindé simple, l'endomorphisme φ est diagonalisable.

Exercice 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 + A^\top = I_n.$$

(1) Montrer A inversible si, et seulement si, $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
(2) Montrer que la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 19. (1) Si A n'est pas inversible, il existe une colonne X non nulle telle que $AX = 0$ et alors l'identité de l'énoncé donne $A^\top X = X$ donc $1 \in \mathrm{Sp}\left(A^\top\right) = \mathrm{Sp}(A)$.

Inversement, si $1 \in \mathrm{Sp}(A)$ alors il existe une colonne X non nulle telle que $AX = X$ et alors l'identité de l'énoncé donne $A^\top X = 0$ et donc $A^\top$ n'est pas inversible. Or $\det\left(A^\top\right) = \det A$ donc A n'est pas inversible non plus.

La relation donnée entraîne

$$\left(A^\top\right)^2 = \left(\mathrm{I}_n - A^2\right)^2 = A^4 - 2A^2 + \mathrm{I}_n.$$

Or

$$\left(A^\top\right)^2 = \left(A^2\right)^\top = \mathrm{I}_n - A$$

donc

$$A^4 - 2A^2 + \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - A$$

et donc la matrice A est annulé par le polynôme

$$P(X) = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)\left(X^2 + X - 1\right).$$

C'est un polynôme scindé à racines simples donc la matrice A est diagonalisable.

Exercice 20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs

$$A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer A^2.

(2) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres de A et les dimensions de ses espaces propres ?

Solution de l'exercice 20. (1) $A^2 = -I_{2n}$.

(2) $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$ est annulateur de A et scindé simple donc A est diagonalisable. De plus A est réelle donc ses valeurs propres sont deux à deux conjuguées, deux valeurs propres conjuguées ont même multiplicité. Puisque les valeurs propres figurent parmi les racines de X^2+1

et que la matrice complexe A possède au moins une valeur propre, on peut affirmer que i et $-i$ sont les deux seules valeurs propres de A, qu'elles sont de multiplicité n. Enfin les sous-espaces propres associés sont de dimension n car A est diagonalisable et donc les dimensions des sous-espaces propres égales la multiplicité des valeurs propres respectives.

Exercice 21. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice de permutation s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer qu'une matrice de permutation est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution de l'exercice 21. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de permutation et σ la permutation associée. Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^q = \mathrm{Id}$ et donc $A^q = I_n$. La matrice A annule alors $X^q - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 22. Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Démontrer que si λ est une valeur propre complexe de A de multiplicité s, alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A de multiplicité s.

(2) On suppose que $A^3 - A^2 + A - I = 0$. Montrer que $\det(A) = 1$.

(3) On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.

(4) On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

(5) On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Démontrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}^-$.

Solution de l'exercice 22. (1) Si $\chi_A(X) = (X-\omega)^s Q(X)$ avec $Q(\omega) \neq 0$, alors puisque χ_A est un polynôme réel, en passant au conjugué,

$$\chi_A(X) = \overline{\chi_A}(X) = (X-\bar{\omega})^s \bar{Q}(X)$$

avec $\bar{Q}(\bar{\omega}) = \overline{Q(\omega)} \neq 0$. Ainsi, $\bar{\omega}$ est racine de χ_A de multiplicité s.

(2) A annule un polynôme scindé à racines simples (1, i et $-i$) donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Les valeurs propres possibles de A sont $1, i$ et $-i$. Puisque $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$, d'après la question (1) la multiplicité de i égale celle de $-i$. Par suite $\det(A) = 1^r (i)^s (-i)^s = 1^r |i|^s = 1$ (où r est la multiplicité de 1 et s la multiplicité commune de i et $-i$).

(3) Les racines du polynôme $X^2 + X + 1$ sont $\lambda_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, les valeurs propres de A sur $\mathbb{C}$, qui sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, sont parmi λ_1 et λ_2. Donc A n'admet pas de valeurs propres réelles. Son polynôme caractéristique, qui est de degré n, n'admet pas de racines sur $\mathbb{R}$. Ceci n'est possible que si n est pair (tout polynôme de degré impair s'annule au moins une fois d'après le théorème des valeurs intermédiaires et l'étude des limites en $\pm\infty$).

(4) Considérons f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A. On a $f^3 + f^2 + f = 0$. Le sous-espace $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f, on peut considérer g la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ qui est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$. Alors, pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, on a $y = f(x)$, d'où

$$g^2(y) + g(y) + y = f^3(x) + f^2(x) + f(x) = 0.$$

Ainsi, $g^2 + g + Id = 0$. La question précédente nous dit que $\mathrm{Im}(f)$, l'espace sur lequel g agit, est de dimension paire.

(5) On procède comme à la deuxième question. On factorise $X^3 + X^2 + X = X(X-j)\left(X-j^2\right)$. A annule un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont dans $0, j$ et j^2. Notons r, s, t leurs multiplicités respectives. Comme à la première question, on doit avoir $t = s$. Maintenant,

$$\mathrm{tr}(A) = r0 + s\left(j + j^2\right) = -s \in \mathbb{Z}^-$$

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 = A^2 \text{ et } \mathrm{tr}(A) = n.$$

Montrer que $A = I_n$.

Solution de l'exercice 23. Le polynôme $X^3 - X^2 = X^2(X-1)$ est un polynôme annulateur de A qui est scindé. Les valeurs propres possibles de A sont donc 0 et 1. Or la trace de A est la somme des valeurs propres (avec leur multiplicité) et $\mathrm{tr}(A) = n$, donc toutes les valeurs propres de A sont égales à 1. Ceci montre que A est inversible et l'égalité $A^3 = A^2$ entraîne $A = I_n$.

Réduction des endomorphismes de $\mathbb{K}_n[X]$

Exercice 24. (1) Montrer que Φ, qui à P associe

$$\left(X^2 - 1\right) P'(X) - (4X+1) P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

(2) Résoudre l'équation différentielle

$$y' = \left(\frac{5+\lambda}{2(x-1)} + \frac{3-\lambda}{2(x+1)}\right) y.$$

(3) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Solution de l'exercice 24. (a) L'application Φ est évidemment linéaire, il reste à voir qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_4[X]$. Pour un polynôme P de degré inférieur à 4 , le polynôme $\left(X^2-1\right)P'(X)-(4X+1)P(X)$ est de degré inférieur à 5 et, si a est le coefficient de X^4 dans P, le coefficient de X^5 dans $\Phi(P)$ est $4a-4a=0$. Par suite Φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_4[X]$ et c'est donc un endomorphisme de cet espace.

(b) L'équation

$$y'=\left(\frac{5+\lambda}{2(x-1)}+\frac{3-\lambda}{2(x+1)}\right)y$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de solution générale

$$\begin{gathered}y(x)=C|x-1|^{(5+\lambda)/2}|x+1|^{(3-\lambda)/2}\\ \text{sur } I=]-\infty;-1[,]-1;1[\text{ ou }]1;+\infty[\end{gathered}$$

(c) Pour $\lambda\in\mathbb{R},\Phi(P)=\lambda P$ si, et seulement si, $P'(X)=\frac{4X+(1+\lambda)}{X^2-1}P(X)$ i.e. si, et seulement si, la fonction polynomiale P est solution, par exemple sur $]1;+\infty[$, de l'équation différentielle

$$y'=\frac{4x+(1+\lambda)}{x^2-1}y$$

Or moyennant une décomposition en éléments simples et passage à l'opposé de λ, cette équation est celle précédemment résolue et le problème est alors de déterminer pour quel paramètre $-\lambda$, la solution précédemment présentée est une fonction polynomiale de degré inférieur à 4. Les valeurs $3,1,-1,-3,-5$ conviennent et ce sont donc des valeurs propres de Φ, de plus il ne peut y en avoir d'autres car $\dim\mathbb{R}_4[X]=5$. Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres λ sont les polynômes

$$C(X-1)^{\frac{5+\lambda}{2}}(X+1)^{\frac{3-\lambda}{2}}\text{ avec } C\neq 0$$

Exercice 25. Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\geq 2$.

(1) Montrer que

$$\phi(P)(X)=(X-a)\left(P'(X)-P'(a)\right)-2(P(X)-P(a))$$

définit. un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) A l'aide de la formule de Taylor, déterminer l'image et le noyau de ϕ.

(3) Trouver ses éléments propres.

L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Solution de l'exercice 25. (a) La linéarité est immédiate et sans peine $\deg(\phi(P))\leq n$ pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On a

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

$$P'(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}(X-a)^{k-1}$$

puis

$$\phi(P)(X)=\sum_{k=2}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}(X-a)^k-2\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

donc

$$\phi(P)(X)=\sum_{k=3}^{n}(k-2)\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k-2P'(a)(X-a).$$

Ainsi

$$P\in\operatorname{Ker}\phi\Longleftrightarrow P'(a)=0\text{ et }\forall 3\leq k\leq n,P^{(k)}(a)=0$$

et donc

$$\operatorname{Ker}\phi=\operatorname{Vect}\left(1,(X-a)^2\right).$$

Aussi

$$P\in\operatorname{Im}\phi\Longleftrightarrow P(a)=P''(a)=0$$

et donc

$$\operatorname{Im}\phi=(X-a)^3\mathbb{R}_{n-3}[X]+\operatorname{Vect}(X-a)$$

(c) On a

$$\phi(P)=\lambda P\Longleftrightarrow\left\{\begin{aligned}0&=\lambda P(a)\\-2P'(a)&=\lambda P'(a)\\(k-2)P^{(k)}(a)&=\lambda P^{(k)}(a)\text{ pour }k\in\{2,\ldots,n\}\end{aligned}\right.$$

Cette équation possède une solution non nulle si, et seulement si, $\lambda=0$, $\lambda=-2$ et $\lambda=k-2$ avec $k\in\{2,\ldots,n\}$ Ainsi On a $E_{-2}(\phi)=\operatorname{Vect}(X-a),E_0(\phi)=\operatorname{Ker}\phi,E_{k-2}(\phi)=\operatorname{Vect}(X-a)^k$ pour $k\in\{3,\ldots,n\}$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $\dim\mathbb{R}_n[X]$: l'endomorphisme est diagonalisable. En fait, la base des $(X-a)^k$ est base de diagonalisation de l'endomorphisme ϕ.

Exercice 26. Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P)=P-(X+1)P'.$$

(1) Justifier que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) Déterminer les valeurs propres de φ et justifier que φ est diagonalisable.

Solution de l'exercice 26. (a) clair, notamment il n'y a pas de problème sur le degré de $\varphi(P)$. (b) $\varphi\left(X^k\right)=X^k-k(X+1)X^{k-1}=(1-k)X^k-kX^{k-1}$. La matrice de φ dans la base canonique de E est triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux sont alors les racines du polynôme caractéristique et ce sont donc les valeurs propres de φ à savoir $1,0,-1,\ldots,(1-n)$. Ces $n+1=\dim E$ valeurs sont distinctes donc φ est diagonalisable.

Exercice 27. Soient $E=\mathbb{R}_n[X]$ et deux réels $a \neq b$.
Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P)=(X-a)(X-b)P'-nXP.$$

(1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
(2) Déterminer les valeurs propres de φ et en déduire que φ est diagonalisable.

Solution de l'exercice 27. (a) Si $\deg P \leq n-1$, il est clair que $\varphi(P) \in E$.

Si $\deg P=n$ après simplification des termes en X^{n+1}, on obtient que $\varphi(P) \in E$.

La linéarité de φ est claire et donc on peut conclure que φ est un endomorphisme.

(b) La matrice de φ dans la base canonique est tridiagonale et peu pratique. Formons plutôt la matrice de φ dans la base des $(X-a)^k$

$$\varphi\left((X-a)^k\right)=k(X-a)^k(X-b)-nX(X-a)^k$$

donc

$$\varphi\left((X-a)^k\right)=(k-n)(X-a)^{k+1}+(k(a-b)-na)(X-a)^k$$

et cette fois-ci la matrice de φ est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux distincts :

$$-nb,-(a+(n-1)b),-(2a+(n-2)b),\ldots,-((n-1)a+b),-na$$

qui sont les valeurs propres de φ. Puisque φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et que $\dim E=n+1$, on peut conclure que φ est diagonalisable

Applications

Exercice 28. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$, lorsque A est l'une des matrices

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 28. – Pour la première matrice, son polynôme caractéristique s'obtient facilement en ajoutant les quatre colonnes de $\det(A-xI_3)$ et : $\chi_A(x)=-(x-1)^2(x-4)$.

On obtient ensuite les sous-espaces propres de A avec les systèmes habituels : $E_4(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right), E_1(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$, et A est diagonalisable. Puis on pose

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

et on a $D=P^{-1}AP$.

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}A^n=PD^nP^{-1}&=P\begin{pmatrix}4^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\\&=\begin{pmatrix}\frac{4^n+2}{3}&\frac{4^n-1}{3}&\frac{4^n-1}{3}\\\frac{4^n-1}{3}&\frac{4^n+2}{3}&\frac{4^n-1}{3}\\\frac{4^n-1}{3}&\frac{4^n-1}{3}&\frac{4^n+2}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

– Pour la deuxième, on obtient : $\chi_A(x)=(x+2)(x-2)^3$, en ajoutant à chaque ligne la première. Puis

$$E_2(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$E_{-2}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

A est donc diagonalisable et on construit de la même façon qu'au-dessus les matrices P et D.

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3.2^n+1}{4} & \frac{2^n-1}{4} & \frac{2^n-1}{4} & \frac{2^n-1}{4} \\ \frac{2^n-1}{4} & \frac{3.2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} \\ \frac{2^n-1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{3.2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} \\ \frac{2^n-1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{3.2^n+1}{4} \end{pmatrix}.$$

Exercice 29. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 29. On a $\chi_A(x) = -(x+2)(x-2)(x-3)$. Comme A admet trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Puis

$$E_{-2}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad E_2(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right),$$

$$E_3(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right).$$

En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et $A = PDP^{-1}$.

Alors, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$A^k = PD^kP^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} (-2)^k - 2\cdot 2^k + 2\cdot 3^k & (-2)^k + 3\cdot 2^k - 4\cdot 3^k & -\left(-2^k\right) - 2^k + 2\cdot 3^k \\ (-2)^k - 4\cdot 2^k + 3\cdot 3^k & (-2)^k + 6\cdot 2^k - 6\cdot 3^k & -\left(-2^k\right) - 2\cdot 2^k + 3\cdot 3^k \\ (-2)^k - 6\cdot 2^k + 5\cdot 3^k & (-2)^k + 9\cdot 2^k - 10\cdot 3^k & -\left(-2^k\right) - 3\cdot 2^k + 5\cdot 3^k \end{pmatrix}.$$

D'autre part, comme $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, A est inversible ; ainsi A^{-1}, puis A^k $\left(k \in \mathbb{Z}_-^*\right)$ existent. On a : $\forall k \in \mathbb{Z}_-^*$,

$$A^k = \left(A^{-1}\right)^{-k} = \left(\left(PDP^{-1}\right)^{-1}\right)^{-k} = \left(PD^{-1}P^{-1}\right)^{-k} = P\left(D^{-1}\right)^{-k}P^{-1} = PD^kP^{-1}$$

Autrement dit, la formule $A^k = PD^kP^{-1}$ est valable pour tout k de $\mathbb{Z}$, et le résultat obtenu plus haut pour A^k aussi.

Exercice 30. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par $u_0 = 0, v_0 = 22, w_0 = 22$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(2u_n + v_n + w_n\right) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + v_n + w_n\right). \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_n + v_n + 2w_n\right) \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n, w_n et étudier la convergence de ces trois suites.

Solution de l'exercice 30. Notons

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et, pour $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0$.

Réduisons la matrice A. On a

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12}-\lambda & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left(\frac{1}{12}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) \end{aligned}$$

Puisque A admet trois vp distinctes et que A est d'ordre 3, A est diagonalisable.

On calcule les sous-espaces propres. On obtient une base (v_1, v_2, v_3) de vecteurs propres associés respectivement à $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

on a

$$P^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = PDP^{-1}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$$

$$X_n = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 12^{-n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$$

et on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} u_n = 14 - 11 \cdot 4^{-n} - 3 \cdot 12^{-n} \\ v_n = 14 + 8 \cdot 12^{-n} \\ w_n = 14 + 11 \cdot 4^{-n} - 3 \cdot 12^{-n} \end{cases}$$

Les suites $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ convergent donc vers 14.

Exercice 31. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(a) Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $M^2 + M = A$. Justifier que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

(c) Déterminer les solutions de l'équation $M^2 + M = A$.

Solution de l'exercice 31. (a) $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 6)$

$\begin{cases} 5x + 3y &= 2x \\ x + 3y &= 2y \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 2.

$\begin{cases} 5x + 3y &= 6x \\ x + 3y &= 6y \end{cases} \Leftrightarrow -x + 3y = 0$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 6

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(b) Si M est solution alors $P^{-1}MP$ est solution de l'équation $X^2 + X = D$ donc $P^{-1}MP$ et D commutent or D est diagonale à coefficients diagonaux distincts donc $P^{-1}MP$ est diagonale. (ici on a utilisé le résultat : toute matrice qui commute à une matrice diagonale est une matrice diagonale, faire le calcul dans ce cas particulier et résoudre le système non linéaire qui en découle ...)

(c) Les coefficients diagonaux a, b vérifient $a^2 + a = 2$ et $b^2 + b = 6$ donc $a = 1$ ou $a = -2$ et $b = 2$ ou $b = -3$. Au termes des calculs on obtient les solutions

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$$

Exercice 32. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P.

(2) Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = A$.

Solution de l'exercice 32. (a) Le polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 16)$. La matrice A est donc diagonalisable et on trouve $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a

$$M^2 = A \Leftrightarrow M = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}M^2P = D \Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = D$$

donc

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 4 \end{pmatrix}$$

D'où les 4 solutions

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 7/3 & -5/3 & 5/3 \\ -5/3 & 1/3 & -1/3 \\ 5/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$
$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 5/3 & -5/3 \\ 5/3 & -1/3 & 1/3 \\ -5/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$
$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 33. Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Solution de l'exercice 33. Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique et celui-ci a pour racines

$$6, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}.$$

Ces deux matrices sont semblables à

$$\operatorname{diag}\left(6, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et donc a fortiori semblables entre elles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais aussi, et c'est assez classique, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

Lemme. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Les matrices A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elles sont semblables sur $\mathbb{C}$.*

En effet,

" $\Rightarrow$ " : Triviale.

" $\Leftarrow$ " : On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Par conséquent, $PA = BP$. On écrit alors $P = Q+iR$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a donc $QA + iRA = BQ + iBR$. En travaillant coefficients par coefficients et en identifiant partie réelle et partie imaginaire, on obtient que $QA = BQ$ et $RA = BR$.

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}, (Q + tR)A = B(Q + tr)$. Comme $Q + tR \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il s'agit de montrer qu'il existe, au moins, un réel t pour lequel $Q + tR \in GL_n(\mathbb{R})$. Considérons l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \det(Q + tR) \end{array}.$$

L'application φ est une application polynomiale puisque le déterminant en est une. Comme $P \in GL_n(\mathbb{C})$, on en déduit que $\varphi(i) \neq 0$ et en particulier l'application φ est non nulle. L'application polynomiale φ admet donc un nombre fini de racines et il en résulte qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) \neq 0$, soit $\det(Q + tR) \neq 0$, ou encore $Q + tR \in GL_n(\mathbb{R})$.