Algèbre linéaire 2 – Feuille 3

Sous-espaces stables
Polynômes d'endomorphisme

Sous-espaces stables, Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1. ($\star$) Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que f et g commutent, montrer que $\mathbf{Im}\, f$ et $\mathbf{Ker}\, f$ sont stables par g.
Que dire de la réciproque ?

Exercice 2. ($\star$) Montrer qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E commute avec un projecteur p si, et seulement si, les espaces $\mathbf{Im}\, p$ et $\mathbf{Ker}\, p$ sont stables par f.

Exercice 3. ($\star$) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille

$$\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$$

soit libre. Montrer que seuls les polynômes en f commutent avec f.

Exercice 4. ($\star$) Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 et vérifiant

$$P(0) = 1 \text{ et } P(A) = AB.$$

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exercice 5. ($\star\star$) On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $q \geq 1$ tel que $A^{q-1} \neq O_n$ et $A^q = O_n$ (q est l'indice de nilpotence de A).

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est nilpotente et qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad B = AP(A).$$

Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Lemme de décomposition des noyaux

Exercice 6. ($\star$) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Soit P un polynôme annulateur de f. On suppose que $P = QR$, où Q et R sont premiers entre eux. Montrer que

$$\mathbf{Im}(R(f)) = \mathbf{Ker}(Q(f))$$

Exercice 7. ($\star$) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux vérifiant $(PQ)(f) = 0$. Montrer

$$\mathbf{Ker}\, P(f) \oplus \mathbf{Im}\, P(f) = E.$$

Exercice 8. ($\star$) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et a un scalaire non nul de $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0$. Montrer que $\mathbf{Ker}\, f \oplus \mathbf{Im}\, f = E$.

Polynômes annulateurs

Exercice 9. ($\star$) Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer un polynôme annulateur pour J. En déduire la valeur de J^k pour $k \geq 2$.

Exercice 10. ($\star$) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$$

On suppose connus deux polynômes P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ annulateurs de A et B respectivement.
Exprimer en fonction de P et Q un polynôme annulateur de M.

Exercice 11. ($\star$) Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant

$$P(0) = 0 \quad \text{et} \quad P'(0) \neq 0.$$

Montrer qu'on a alors $\mathbf{Im}(f) \oplus \mathbf{Ker}(f) = E$.

Polynôme minimal

Exercice 12. ($\star$) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice, déterminer une relation entre les premières puissances pour obtenir un polynôme annulateur, puis déduire le polynôme minimal.

Exercice 13. ($\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que

$$A^3 - 3A^2 + 2A = 0, \quad \text{et} \quad \det A \notin \{1, 8\}.$$

Déterminer π_A.

Exercice 14. ($\star$) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E tel que $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq \mathrm{Id}_E$. Montrer que son polynôme minimal est $\pi_f(X) = X^2 - X$.

Exercice 15. ($\star$) On rappelle qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe un entier $q \geq 1$ tel que $f^{q-1} \neq 0$ et $f^q = 0$ (q est l'indice de nilpotence de f).

Montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'indice $q \geq 1$ si, et seulement si, $\pi_f(X) = X^q$.

Exercice 16. ($\star\star$) On sait qu'un endomorphisme admet un polynôme annulateur non-nul lorsque E est de dimension finie. Si E est de dimension infinie, ce n'est plus nécessairement le cas.

(a) Montrer que l'endomorphisme D de dérivation qui associe à toute fonction $f \in E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sa dérivée f' n'a pas de polynôme minimal.

(b) Donner l'exemple d'un autre endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui n'a pas de polynôme minimal.

Exercice 17. ($\star\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle. Cette matrice est aussi une matrice complexe. En désignant respectivement par $\pi_{A,\mathbb{R}}$ et $\pi_{A,\mathbb{C}}$ le polynôme minimal de A dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$, montrer que $\pi_{A,\mathbb{R}} = \pi_{A,\mathbb{C}}$.

Exercice 18. ($\star\star$) Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant un polynôme minimal π_f et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(f)$ est inversible si, et seulement si, P et π_f sont premiers entre eux.
Observer qu'alors $P(f)^{-1}$ est un polynôme de f.

Exercice 19. ($\star\star$) Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E admettant un polynôme minimal, $F = \mathbf{Ker}\, P(f)$ et $f_{|F}$ la restriction de f à F.

(a) Montrer que $F = \{0\}$ si, et seulement si, P et π_f sont premiers entre eux.

(b) On suppose que P et π_f ne sont pas premiers entre eux.

Comme $F \neq \{0\}$ est stable par f (car f commute à $P(f)$), $f_{|F}$ est un endomorphisme de F et on désigne par π_F son polynôme minimal.

Montrer que $\pi_F = \mathrm{pgcd}(P, \pi_f)$.

Exercice 20. ($\star\star$) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G stables par f. On note π_F le polynôme minimal de $f_{|F}$ et π_G le polynôme minimal de $f_{|G}$.
Montrer que $\pi_f = \mathrm{ppcm}\,(\pi_F, \pi_G)$.