Algèbre linéaire 2 – Feuille 3

Sous-espaces stables
Polynômes d'endomorphisme

Sous-espaces stables, Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1. ($\star$) Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que f et g commutent, montrer que $\mathbf{Im}\, f$ et $\mathbf{Ker}\, f$ sont stables par g.
Que dire de la réciproque ?

Solution de l'exercice 1. Soit $y \in \mathbf{Im}\, f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et alors

$$g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \mathbf{Im}\, f.$$

Ainsi, $\mathbf{Im}\, f$ est stable par g.

Soit $x \in \mathbf{Ker}\, f$. On a $f(x) = 0_E$ donc

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$$

et $g(x) \in \mathbf{Ker}\, f$. Ainsi $\mathbf{Ker}\, f$ est stable par v.

La réciproque est fausse, si f est un automorphisme il est certain que $\mathbf{Im}\, f = E$ et $\mathbf{Ker}\, f = \{0_E\}$ seront stables par g alors qu'il n'y aucune raison que f et g commutent.

Exercice 2. ($\star$) Montrer qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E commute avec un projecteur p si, et seulement si, les espaces $\mathbf{Im}\, p$ et $\mathbf{Ker}\, p$ sont stables par f.

Solution de l'exercice 2. Si $f \circ p = p \circ f$, alors d'après l'exercice 1, $\mathbf{Ker}\, p$ et $\mathbf{Im}\, p$ sont stable par f.

Inversement, supposons $\mathbf{Ker}\, p$ et $\mathbf{Im}\, p$ stables par f. Comme $\mathbf{Ker}\, p \oplus \mathbf{Im}\, p = E$, pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \mathbf{Ker}\, p$ et $v \in \mathbf{Im}\, p$. On a alors

$$f(p(x)) = f(v)$$

et

$$p(f(x)) = p(f(u) + f(v)) = f(v)$$

car $f(u) \in \mathbf{Ker}\, p$ et $f(v) \in \mathbf{Im}\, p$. Donc $p \circ f = f \circ p$.

Exercice 3. ($\star$) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille

$$\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$$

soit libre. Montrer que seuls les polynômes en f commutent avec f.

Solution de l'exercice 3. La famille $\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ constitue une base de E.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec f. On peut écrire

$$g\left(x_0\right) = a_0 x_0 + a_1 f\left(x_0\right) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}\left(x_0\right).$$

Considérons alors

$$h = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \in \mathbb{K}[f].$$

On a

$$g\left(x_0\right) = h\left(x_0\right).$$

Puisque g et h commutent avec f, on a aussi

$$\forall k \in \mathbb{N}, g\left(f^k\left(x_0\right)\right) = h\left(f^k\left(x_0\right)\right).$$

Les endomorphismes g et h prennent les mêmes valeurs sur une base, ils sont donc égaux. En conclusion $g \in \mathbb{K}[f]$.

Exercice 4. ($\star$) Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 et vérifiant

$$P(0) = 1 \text{ et } P(A) = AB.$$

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Solution de l'exercice 4. On peut écrire

$$AB = P(A) = \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + I_n$$

donc

$$A\left(B - \left(\alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I_n\right)\right) = I_n.$$

Il s'ensuit alors que A est inversible et que

$$A^{-1} = B - \left(\alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I_n\right)$$

Puisque A commute avec A^{-1} et ses puissances, on en déduit que A commute avec

$$B = A^{-1} + \alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I.$$

Exercice 5. ($\star\star$) On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $q \geq 1$ tel que $A^{q-1} \neq O_n$ et $A^q = O_n$ (q est l'indice de nilpotence de A).

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est nilpotente et qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(0) = 1 \text{ et } B = AP(A).$$

Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Solution de l'exercice 5. On sait qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$. Supposons $\deg P = m \geq p$ et posons $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$. Lh'ypoède $P(0) = 1$ implique $a_0 = 1$ et donc

$$P(A) = I_n + a_1 A + \cdots a_{p-1} A^{p-1}.$$

La relation $B = AP(A)$ donne

$$B = A + a_1 A^2 + \cdots + a_{p-2} A^{p-1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} B^2 &= A^2 (P(A))^2 = A^2 + a_{2,2} A^3 + \cdots + a_{2,a-2} A^{p-1}, \\ &\ldots \\ B^{p-2} &= A^{p-2} + a_{p-2,p-2} A^{p-1}, \\ B^{p-1} &= A^{p-1}. \end{aligned}$$

En inversant ces équations, on obtient

$$\begin{aligned} A^{p-1} &= B^{p-1}, \\ A^{p-2} &= B^{p-2} + a_{p-2,p-2} A^{p-1}, \\ &\ldots, \\ A^2 &= B^2 + b_{2,2} B^3 + \cdots + b_{2,p-2} B^{p-1} \end{aligned}$$

et enfin

$$A = B + b_{1,1} B^2 + \cdots + b_{1,p-2} B^{p-1}$$

ce qui détermine un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Lemme de décomposition des noyaux

Exercice 6. $(\star)$ Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Soit P un polynôme annulateur de f. On suppose que $P = QR$, où Q et R sont premiers entre eux. Montrer que

$$\mathbf{Im}(R(f)) = \mathbf{Ker}(Q(f))$$

Solution de l'exercice 6. D'après le théorème de décomposition des noyaux, on a

$$E = \mathbf{Ker}(P(u)) = \mathbf{Ker}(R(f)) \oplus \mathbf{Ker}(Q(f)).$$

En particulier, on sait que $\dim(\mathbf{Ker}\, R(f)) + \dim(\mathbf{Ker}\, Q(f)) = \dim(E)$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $R(f)$, on a aussi

$$\dim(\mathbf{Im}(R(f)) + \dim(\mathbf{Ker}(R(f)) = \dim(E).$$

On en déduit que $\mathbf{Im}(R(f))$ et $\mathbf{Ker}(Q(f))$ ont la même dimension. De plus, on a sait que

$$QR(f) = Q(f) \circ R(f) = 0,$$

ce qui implique que $\mathbf{Im}(R(f)) \subset \mathbf{Ker}\, Q(f))$. Puisque ces deux sous-espaces ont la même dimension, ils sont en réalité égaux.

Exercice 7. $(\star)$ Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux vérifiant $(PQ)(f) = 0$. Montrer

$$\mathbf{Ker}\, P(f) \oplus \mathbf{Im}\, P(f) = E.$$

Solution de l'exercice 7. Les polynômes P et Q étant premiers entre eux, on peut introduire des polynômes V, W vérifiant

$$PV + QW = 1.$$

En évaluant en f, on obtient la relation

$$\mathrm{Id}_E = P(f) \circ V(f) + Q(f) \circ W(f) \tag{1}$$

Soit $x \in \mathbf{Ker}\, P(f) \cap \mathbf{Im}\, P(f)$. Puisque $Q(f) \circ P(f) = (PQ)(f) = 0$, on a $\mathbf{Im}\, P(f) \subset \mathbf{Ker}\, Q(f)$ et donc $x \in \mathbf{Ker}\, P(f) \cap \mathbf{Ker}\, Q(f)$. La relation (1) donne alors

$$x = V(f) \circ P(f)(x) + W(f) \circ Q(f)(x) = 0_E.$$

Ainsi, les espaces $\mathbf{Ker}\, P(f)$ et $\mathbf{Im}\, P(f)$ sont en somme directe.

Soit $x \in E$. Par la relation $(*)$, on peut écrire

$$x = a + b \text{ avec } a = P(f) \circ V(f)(x) \text{ et. } b = Q(f) \circ W(f)(x).$$

On a évidement $a \in \mathbf{Im}\, P(f)$ et alıssi $b \in \mathbf{Ker}\, P(f)$ car

$$P(f)(b) = (PQ)(u) \circ W(f)(x) = 0_E.$$

On peut alors conclure l'égalité $\mathbf{Ker}\, P(f) \oplus \mathbf{Im}\, P(f) = E$.

Remarque Comme P er Q jouent le même rôle, on a aussi $\mathbf{Ker}\, Q(f) \oplus \mathbf{Im}\, Q(f) = E$.

Exercice 8. **($\star$)** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et a un scalaire non nul de $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0$. Montrer que $\mathbf{Ker}\, f \oplus \mathbf{Im}\, f = E$.

Solution de l'exercice 8. $P = X\left(X^2 - 3aX + a^2\right)$ est annulateur de f donc par le théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \mathbf{Ker}\, f \oplus \mathbf{Ker}\left(f^2 - 3af + a^2 \mathrm{Id}\right)$$

car X et $X^2 - 3aX + a^2$ sont premiers entre eux. Or a étant non nul, on montre élémentairement $\mathrm{Ker}\left(f^2 - 3af + a^2\mathrm{Id}\right) \subset \mathrm{Im}\, f$ tandis que l'inclusion réciproque provient de ce que $\left(f^2 - 3af + a^2\ \mathrm{Id}\right)$ o $f = 0$. Ainsi $\mathbf{Ker}\, f$ et $\mathbf{Im}\, f$ sont supplémentaires.

Polynômes annulateurs

Exercice 9. **($\star$)** Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer un polynôme annulateur pour J. En déduire la valeur de J^k pour $k \geq 2$.

Solution de l'exercice 9. On vérifie facilement que $J^2 = nJ$ et donc que $P(X) = X^2 - nX$ est un polynôme annulateur pour J. Effectuons ensuite la division euclidienne de X^k par P. Puisque P est de degré 2, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$X^k = P(X)Q(X) + aX + b.$$

On évalue cette égalité en les racines de P, à savoir 0 et n. L'évaluation en 0 donne $b = 0$ et l'évalution en n donne $a = n^{k-1}$. On a donc

$$X^k = P(X)Q(X) + n^{k-1}X$$

En évaluant cette dernière égalité en J, déduit que $J^k = n^{k-1}J$ (car $P(J) = 0$).

Remarque. On aurait tout aussi bien pu prouver assez simplement cette relation par récurrence!

Exercice 10. **($\star$)** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$$

On suppose connus deux polynômes P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ annulateurs de A et B respectivement.
Exprimer en fonction de P et Q un polynôme annulateur de M.

Solution de l'exercice 10. On commence par remarque que, pour tout $n \geq 1$, M^n a la forme suivante

$$\begin{pmatrix} A^n & * \\ 0 & B^n \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout polynôme R, on a

$$R(M) = \begin{pmatrix} R(A) & * \\ 0 & R(B) \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

et

$$Q(M) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors aisément que $PQ(M) = P(M)Q(M) = 0$.

Exercice 11. **($\star$)** Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant

$$P(0) = 0 \text{ et } P'(0) \neq 0.$$

Montrer qu'on a alors $\mathbf{Im}(f) \oplus \mathbf{Ker}(f) = E$.

Solution de l'exercice 11. Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ ce polynôme. Puisque $P(0) = 0$, on a $a_0 = 0$. Puisque $P'(0) \neq 0$, on a $a_1 \neq 0$. Prenons maintenant $y \in \mathbf{Ker}(f) \cap \mathbf{Im}(f)$. On peut donc écrire $y = f(x)$ et on sait que $f(y) = 0$, ce qui entraîne $f^k(x) = 0$ pour tout $k \geq 2$. On applique alors la relation $P(f) = 0$ à x :

$$0 = P(f)(x) = a_n f^n(x) + \cdots + a_1 f(x) = a_1 f(x) = a_1 y$$

ce qui entraîne $y = 0$. Ainsi $\mathbf{Ker}(f)$ et $\mathbf{Im}(f)$ sont donc en somme directe. De plus, par le théorème du rang, on sait que

$$\dim(\mathbf{Ker}(f)) + \dim(\mathbf{Im}(f)) = \dim(E)$$

D'où l'égalité demandée.

Polynôme minimal

Exercice 12. ($\star$) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice, déterminer une relation entre les premières puissances pour obtenir un polynôme annulateur, puis déduire le polynôme minimal.

Solution de l'exercice 12. On va utiliser plusieurs méthodes.

(a) On peut remarquer que $A_2^2 A = -I_2$. Donc le polynôme $(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A. Son polynôme minimal ne peut être que $(X-1)$ ou $(X-1)^2$. Ca ne peut pas être $X-1$ car si A serait égale à I_2 donc son polynôme minimal est $(X-1)^2$.

(b) Pour B, on remarque que $B^2 = 3B$ et donc $B^2 - 3B = 0$. Comme B n'est pas un multiple de l'identité, on en déduit que son polynôme minimal est $X^2 - 3X$.

(c) Il suffit de remarque que $C^2 = I_3$. Donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de C. Son polynôme minimal ne peut être que $X-1$ ou (X+1$ou X^2 - 1$. Ca ne peut pas être $X \pm 1$ car si A serait égale à $\pm I_2$, donc son polynôme minimal est $X^2 - 1$.

(d) On peut remarquer que $D^2 + 2D = -I_4$. Donc le polynôme $(X+1)^2$ est un polynôme annulateur de D. Son polynôme minimal ne peut être que $(X+1)$ ou $(X+1)^2$. Ca ne peut pas être $X+1$ car si D serait égale à I_4 donc son polynôme minimal est $(X+1)^2$

Exercice 13. ($\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que

$$A^3 - 3A^2 + 2A = 0, \quad \text{et} \quad \det A \notin \{1, 8\}.$$

Déterminer π_A.

Solution de l'exercice 13. On a $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et comme A est inversible $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. Le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est donc un polynôme annulateur de A. Or $P(X) = (X-1)(X-2)$.

- si $\pi_A(X) = X - 1$, alors $A = I_3$ et $\det A = 1$, ce qui contredit l'hypothèse ;
- si $\pi_A(X) = X - 2$, alors $A = 2I_3$ et $\det A = 8$, ce qui contredit l'hypothèse aussi.

Ainsi $\pi_A(X) = X^2 - 3X + 2$.

Exercice 14. ($\star$) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E tel que $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq \mathrm{Id}_E$. Montrer que son polynôme minimal est $\pi_f(X) = X^2 - X$.

Solution de l'exercice 14. Un tel projecteur étant annulé par $X^2 - X$, son polynôme minimal est $\pi_f(X) = X$ si $f = 0$, $\pi_f(X) = X - 1$ si $f = \mathrm{Id}$, $\pi_f(X) = X^2 - X$ dans les autres cas.

Exercice 15. ($\star$) On rappelle qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe un entier $q \geq 1$ tel que $f^{q-1} \neq 0$ et $f^q = 0$ (q est l'indice de nilpotence de f).

Montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'indice $q \geq 1$ si, et seulement si, $\pi_f(X) = X^q$.

Solution de l'exercice 15.

Exercice 16. ($\star\star$) On sait qu'un endomorphisme admet un polynôme annulateur non-nul lorsque E est de dimension finie. Si E est de dimension infinie, ce n'est plus nécessairement le cas.

(a) Montrer que l'endomorphisme D de dérivation qui associe à toute fonction $f \in E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sa dérivée f' n'a pas de polynôme minimal.

(b) Donner l'exemple d'un autre endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui n'a pas de polynôme minimal.

Solution de l'exercice 16. D admet un polynôme annulateur si et seulement si son idéal annulateur

$$I_D = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(D) = 0\}$$

n'est pas nul.
Supposons $I_D \neq \{0\}$, en soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme anmulateur non null de D. Donc

$$P(D) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Pour tout réel λ, soit $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$, on a alors

$$0_E = P(D)(f_\lambda) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k (f_\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) f_\lambda = P(\lambda) f_\lambda$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = 0$, puisque $f_\lambda \neq 0$. Ce polynôme non nul P aurait alors une infinité de racines, ce qui est absurde. On a donc $I_D = \{0\}$ et D n'a pass de polynôme minimal.

(b) Considérons par exemple $E = \mathbb{R}[X]$, et u l'endomorphisme défini par $u(A) = XA$. Alors u n'admet pas de polynôme annulateur autre que le polynôme nul. En effet, soit $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_0$ un polynôme, alors

$$P(u)(1) = a_k u^k(1) + \cdots + a_1 u(1) + a_0 Id(1) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0,$$

qui est non-nul si $P \neq 0$. D'où $P(u) \neq 0$ si $P \neq 0$.

Exercice 17. ($\star\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle. Cette matrice est aussi une matrice complexe. En désignant respectivement par $\pi_{A,\mathbb{R}}$ et $\pi_{A,\mathbb{C}}$ le polynôme minimal de A dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$, montrer que $\pi_{A,\mathbb{R}} = \pi_{A,\mathbb{C}}$.

Solution de l'exercice 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\pi_{A,\mathbb{R}}(A) = 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme $\pi_{A,\mathbb{R}}$ est multiple de $\pi_{A,\mathbb{C}}$ et $d' = \deg(\pi_{A,\mathbb{C}}) \leq d = \deg(\pi_{A,\mathbb{R}})$.

Comme d est le degré du polynôme minimal dans $\mathbb{R}[X]$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le système $\left(A^k\right)_{0\leq k\leq d-1}$ est nécessairement $\mathbb{R}$-libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui entraîne qu'il est $\mathbb{C}$-libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En effet s'il existe des nombres complexes $\lambda_0, \cdots, \lambda_{d-1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k A^k = 0$$

en notant $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ avec α_k et β_k réels, on a

$$\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k A^k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{d-1} \beta_k A^k = 0$$

dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (A est réelle) et $\alpha_k = \beta_k$ pour tout k.

Comme d' est le degré du polynôme minimal dans $\mathbb{C}[X]$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le système $\left(A^k\right)_{0\leq k\leq d'}$ est $\mathbb{C}$-lié dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $d' \leq d-1$ entraînerait $\left(A^k\right)_{0\leq k\leq d-1}$ lié dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ce qui n'est pas.

On a donc $d' > d-1$, soit $d' \geq d$ et $d = d'$. Comme les polynômes $\pi_{A,\mathbb{R}}$ et $\pi_{A,\mathbb{C}}$ sont unitaires, on en déduit l'égalité $\pi_{A,\mathbb{R}} = \pi_{A,\mathbb{C}}$.

Exercice 18. (⋆⋆) Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant un polynôme minimal π_f et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(f)$ est inversible si, et seulement si, P et π_f sont premiers entre eux.
Observer qu'alors $P(f)^{-1}$ est un polynôme de f.

Solution de l'exercice 18. Si P et π_f sont premiers entre eux alors par l'égalité de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + V\pi_f = 1$ donc $U(f)P(f) = \mathrm{Id}_E$. Aussi $P(f)U(f) = \mathrm{Id}_E$ donc $P(f)$ est inversible et $P(f)^{-1} = U(f) \in \mathbb{K}[u]$.

Si P et π_f ne sont pas premiers entre eux alors on peut écrire $\pi_f = QD$ avec D le pgcd de P et π_f. On a $\pi_f \mid PQ$ donc $P(f)Q(f) = 0$ alors que $Q(f) \neq 0$ puisque $\deg Q < \deg \pi_f$. Par suite $P(f)$ n'est pas inversible.

Exercice 19. (⋆⋆) Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E admettant un polynôme minimal, $F = \mathbf{Ker}\, P(f)$ et $f_{|F}$ la restriction de f à F.

(a) Montrer que $F = \{0\}$ si, et seulement si, P et π_f sont premiers entre eux.

(b) On suppose que P et π_f ne sont pas premiers entre eux.

Comme $F \neq \{0\}$ est stable par f (car f commute à $P(f)$), $f_{|F}$ est un endomorphisme de F et on désigne par π_F son polynôme minimal.

Montrer que $\pi_F = \mathrm{pgcd}(P, \pi_f)$.

Solution de l'exercice 19. (a) Si $P \wedge \pi_u = 1$, le théorème de Bézout nous assure de l'existence de A, B dans. $\mathbb{K}[X]$ tels. que $AP + B\pi_u = 1$, ce qui nous donne

$$\mathrm{Id} = A(f) \circ P(f) + B(f) \circ \pi_f(f) = A(f) \circ P(f)$$

et $P(f)$ est inversible, donc $F = \mathbf{Ker}\, P(f) = \{0\}$.

Si $P \wedge \pi_f \neq 1$, il existe un diviseur commun irréductible P_1 de P et π_f. Posons $\pi_F = P_1 Q$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Si $P_1(f)$ est inversible de $0 = \pi_f(f) = P_1(f) \circ Q(f)$, on déduit que $Q(f) = 0$ avec $\deg(Q) < \deg(\pi_f)$, ce qui contredit le caractère minimal de π_f. L'endomorphisme $P_1(f)$ est donc non inversible et $\mathbf{Ker}\, P_1(f) \neq \{0\}$, ce qui entraîne $\mathbf{Ker}\, P(f) \neq \{0\}$ puisque cet espace contient $\mathbf{Ker}\, P_1(f)$.

(b) De $\pi_f\left(f_{|F}\right) = P\left(f_{|F}\right) = 0$, on déduit que π_F divise π_f et P, donc leur pgcd, $\Delta = P \wedge \pi_f$, soit $\Delta = Q\,\pi_F$ et il s'agit de montrer que $Q = 1$.

Comme Δ divise P, on a $\mathbf{Ker}\, \Delta(f) \subset F = \mathbf{Ker}\, P(f)$. D'autre part, le théorème de Bézout nous. dit qu'il existe A, B dans. $\mathbb{K}[X]$ tels que $AP + B\pi_f = \Delta$, d'où $\Delta(f) = A(f) \circ P(f)$ et $F = \mathbf{Ker}\, P(f) \subset \mathbf{Ker}\, \Delta(f)$. On a donc $F = \mathbf{Ker}\, \Delta(f)$.

Comme Δ divise π_f, on a $\pi_f = \Delta Q_1$ et $\Delta(f) \circ Q_1(f) = 0$, donc $\mathbf{Im}\,(Q_1(f)) \subset F = \mathbf{Ker}\, \Delta(f)$ et $\pi_F(f) \circ Q_1(f) = 0$.

En résumé, $\pi_f = Q_1 \Delta = Q_1 Q \pi_F$ avec $Q_1 \pi_F(f) = 0$, ce qui impose $Q = \lambda \in \mathbb{K}^*$, soit $\Delta = \lambda \pi_F$ et $\Delta = \pi_F$ puisque ces polynômes sont unitaires.

Exercice 20. (⋆⋆) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G stables par f. On note π_F le polynôme minimal de $f_{|F}$ et π_G le polynôme minimal de $f_{|G}$.
Montrer que $\pi_f = \mathrm{ppcm}(\pi_F, \pi_G)$.

Solution de l'exercice 20. π_f annule f donc aussi f_F et ainsi $\pi_{f_F} \mid \pi_f$. De même $\pi_{f_G} \mid \pi_f$ donc $\mathrm{ppcm}(\pi_{f_F}, \pi_{f_G}) \mid \pi_f$.

Inversement si $P = \mathrm{ppcm}(\pi_{f_F}, \pi_{f_G})$ alors $\forall x \in F, P(f)(x) = 0$ et $\forall x \in G$, $P(f)(x) = 0$ donc $\forall x \in E = F \oplus G$, $P(f)(x) = 0$ donc P annule f puis $\pi_f \mid P$.