Algèbre linéaire 2 – Feuille 2

Déterminants

Groupe symétrique

Exercice 1. Soient les permutations suivantes,

$$(a)\ \sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&5&4&8&7&6&2&1 \end{smallmatrix}\right), \quad (b)\ \sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 1&3&2&7&4&8&5&6 \end{smallmatrix}\right).$$

Déterminer dans chaque cas le nombre d'inversions et la signature.

Exercice 2. Exercice 1. On considère la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{10}$ définie par

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10 \\ 4&6&8&7&2&5&10&3&1&9 \end{smallmatrix}\right).$$

(a) Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
(b) Calculer la signature de σ.

Applications multilinéaires

Exercice 3. Pour tous vecteurs $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ et $w = (z_1, z_2, z_3)$ de $\mathbb{R}^3$ soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v,w) & \mapsto & \varphi(u,v,w) \end{array}$$

Dans chacun des cas suivants dire si l'application φ est trilinéaire,
(1) $\varphi(u,v,w) = x_1 + y_1 + z_1$;
(2) $\varphi(u,v,w) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$;
(3) $\varphi(u,v,w) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$;
(4) $\varphi(u,v,w) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$;
(5) $\varphi(u,v,w) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$;
(6) $\varphi(u,v,w) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$;
(7) $\varphi(u,v,w) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$.

Exercice 4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient f une forme linéaire sur E, p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{Id} - p$ sa projection complémentaire.

Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x,y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée sur E.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit ϕ une forme bilinéaire alternée sur E et soit f une forme linéaire de E.
Montrer que la forme $f \wedge \phi : E \times E \times E \to \mathbb{K}$ donnée par

$$(f \wedge \phi)(v_1, v_2, v_3) = f(v_1)\,\phi(v_2, v_3) + f(v_2)\,\phi(v_3, v_1) + f(v_3)\,\phi(v_1, v_2)$$

est trilinéaire alternée.

Exercice 6. Pour tous vecteurs $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$u \wedge v = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

le vecteur $u \wedge v$ est appelé produit vectoriel des vecteurs u et v. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & u \wedge v \end{array}$$

est une application bilinéaire alternée.

Déterminants : petits calculs pour se faire la main

Exercice 7. Calculer les déterminants suivants :

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3)\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad (5)\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \quad (6)\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(7)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (8)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (9)\begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 31 & 78 \end{vmatrix}.$$

Exercice 8. Calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ de plusieurs façons :

(a) En développant suivant la première ligne.
(b) En développant suivant la première colonne.
(c) En remarquant que la 3e ligne s'écrit $(0,1,1) + (1,0,0)$.
(d) En faisant des opérations sur les lignes.

Déterminants : plus techniques

Exercice 9. Montrer les égalités suivantes sans calculer les déterminants,

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 & 5 \\ 8 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 14 & 5 & 18 \\ 9 & 2 & 8 & 30 \\ 12 & 10 & 7 & 12 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ zx & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 10. (a) Les nombres 1625, 5928, 1690 et 3185 étant divisibles par 13, montrer, sans le calculer, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

est divisible par 13.

(b) Démontrer sans le calculer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

est divisible par 13×8 (on commencera par remarquer que 156, 260 et 325 sont divisibles par 13).

Exercice 11. Calculer (avec un minimum d'opérations) les déterminants suivants

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

$$(3)\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} \quad (4)\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

Exercice 12. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB, en déduire $\det B$.

Exercice 13. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det A$.
Calculer BA, en déduire $\det B$.

Déterminants : à paramètres

Exercice 14. Calculer les déterminants suivants

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

$$(3)\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \quad (4)\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$(5)\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} (6)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(7)\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}.$$

Déterminants : avec astuces

Exercice 15. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} y^2+z^2 & yx & zx \\ xy & z^2+x^2 & zy \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det A$ (écrire d'abord A comme le produit de deux matrices).

Exercice 16. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab \\ bc+ca+ab & bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 \\ a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab & bc+ca+ab \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det A$ (écrire d'abord A comme le produit de deux matrices).

Exercice 17. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)^3 & (x_1+y_2)^3 & (x_1+y_3)^3 & (x_1+y_4)^3 \\ (x_2+y_1)^3 & (x_2+y_2)^3 & (x_2+y_3)^3 & (x_2+y_4)^3 \\ (x_3+y_1)^3 & (x_3+y_2)^3 & (x_3+y_3)^3 & (x_3+y_4)^3 \\ (x_4+y_1)^3 & (x_4+y_2)^3 & (x_4+y_3)^3 & (x_4+y_4)^3 \end{pmatrix}.$$

Ecrire A comme le produit de deux matrices. En déduire $\det A$.

Exercice 18. (a) Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

(b) En déduire

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 19. 1. Soit $a, b, c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et

$$f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}.$$

Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

2. Généraliser à un déterminant 3×3.
3. Application : Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}.$$

Déterminants : d'ordre $n \times n$

Exercice 20. Calculer les déterminants d'ordre n suivant

$$(a)\ \ D_n = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix}_{[n]},\quad (b)\ \ D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}_{[n]};$$

$$(c)\ \ D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Exercice 21. Soit (f_n) la suite de Fibonacci définie par $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Calculer le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficient général $f_{|i-j|}$.

Exercice 22. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det\left(a_{\max(i,j)}\right)$.
En déduire en particulier $\det(\max(i,j))$ et $\det(\min(i,j))$.

Exercice 23. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B = ((-1)^{i+j}a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Comparer $\det A$ et $\det B$.

Déterminants : calculs par une relation de récurrence

Exercice 24. Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre n suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Exercice 25. Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre n suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Exercice 26. Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre $n+1$ suivant

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{2n}^n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

où C_n^k est le coefficient binomial

$$C_n^k = \binom{k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice 27. Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre n suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Exercice 28. Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$.
Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Exercice 29. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Déterminants : la comatrice

Exercice 30. Soient n un entier supérieur à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(a) Établir
(1) $\mathrm{rg}(A) = n \Longrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n$;
(2) $\mathrm{rg}(A) = n-1 \Longrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$;
(3) $\mathrm{rg}(A) \leq n-2 \Longrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0$.
(b) Montrer

$$\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det(A))^{n-1}.$$

(c) En déduire

$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)).$$

Exercice 31. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre, pour $n \geq 3$, l'équation $\mathrm{Com}\, A = A$.

Déterminants : des matrices par blocs

Exercice 32. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $CD = DC$.
(a) On suppose que D est inversible, établir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

(b) Généraliser la formule au cas où D n'est plus supposée inversible.

Exercice 33. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC).$$

Exercice 34. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ B & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

(a) A quelle condition la matrice A est-elle inversible ?
(b) Donner son inverse quand cela est possible.

Déterminants : applications

Exercice 35. Soit dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3), avec $v_1 = (1, 1, \alpha)$, $v_2 = (1, \alpha, 1)$ et $v_3 = (\alpha, 1, 1)$. Dire pour quelles valeurs de α la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

Exercice 36. Soient $(z_0, \dots, z_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$\left((X - z_0)^n, (X - z_1)^n, \dots, (X - z_n)^n\right)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$

Exercice 37. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'application linéaire associée à M_α est bijective.

Exercice 38. Étudier, suivant les valeurs des paramètres $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, l'inversibilité des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2 - m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2 - m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$