Algèbre linéaire 2 – Feuille 2

Déterminants

Groupe symétrique

Exercice 1. Soient les permutations suivantes,

$$(a)\ \sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&5&4&8&7&6&2&1 \end{smallmatrix}\right), \quad (b)\ \sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 1&3&2&7&4&8&5&6 \end{smallmatrix}\right).$$

Déterminer dans chaque cas le nombre d'inversions et la signature.

Solution de l'exercice 1. On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ :

$$I(\sigma) = \operatorname{Card}(\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ et $I(\sigma)$ se calcule en dénombrant, pour chaque de terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.

(a) $I(\sigma) = 2+3+2+4+3+2+1+0 = 17$ donc $\varepsilon(\sigma) = -1$.

(b) $I(\sigma) = 0+1+0+3+0+2+0+0 = 6$ donc $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Exercice 2. Exercice 1. On considère la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{10}$ définie par

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10 \\ 4&6&8&7&2&5&10&3&1&9 \end{smallmatrix}\right).$$

(a) Décomposer σ en produit de cycles disjoints.

(b) Calculer la signature de σ.

Solution de l'exercice 2. (a) On trouve

$$\sigma = (1\ 4 7\ 10\ 9)(2\ 6\ 5)(3\ 8)$$

et on note $\sigma_1 = (1\ 4\ 7\ 10\ 9)$, $\sigma_2 = (2\ 6\ 5)$ et $\sigma_3 = (3\ 8)$. Les trois cycles sont deux à deux disjoints d'ordre respectivement 5,3 et 2 .

(b) On a

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)\,\varepsilon(\sigma_2)\,\varepsilon(\sigma_3) = (-1)^{5-1} \times (-1)^{3-1} \times (-1)^{2-1} = -1$$

Applications multilinéaires

Exercice 3. Pour tous vecteurs $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ et $w = (z_1, z_2, z_3)$ de $\mathbb{R}^3$ soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v, w) & \mapsto & \varphi(u, v, w) \end{array}$$

Dans chacun des cas suivants dire si l'application φ est trilinéaire,

(1) $\varphi(u, v, w) = x_1 + y_1 + z_1$;

(2) $\varphi(u, v, w) = x_1 y_3 + y_2 z_1 + z_3 x_2$;

(3) $\varphi(u, v, w) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2$;

(4) $\varphi(u, v, w) = x_1 x_2 x_3 + y_1 y_2 y_3 + z_1 z_2 z_3$;

(5) $\varphi(u, v, w) = x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2 + x_3 y_3 z_3$;

(6) $\varphi(u, v, w) = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)(z_1 + z_3)$;

(7) $\varphi(u, v, w) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$.

Solution de l'exercice 3. Les applications (3), (5) (6) et (7) sont trilinéaires, les autres ne le sont pas.

Exercice 4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient f une forme linéaire sur E, p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{Id} - p$ sa projection complémentaire.

Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x, y) = f(p(x)) f(q(y)) - f(p(y)) f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée sur E.

Solution de l'exercice 4. $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.

$\varphi(y, x) = f(p(y)) f(q(x)) - f(p(x)) f(q(x)) = -\varphi(x, y)$. Il suffit d'étudier la linéarité en la 1ère variable.

$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = f(p(\lambda x + \mu x')) f(q(y)) - f(p(y)) f(q(\lambda x + \mu x'))$ or f, p et q sont linéaires donc

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + \mu x', y) = {} & (\lambda f(p(x)) + \mu f(p(x'))) f(q(y)) \\ & - f(p(y))(\lambda f(q(x)) + \mu f(q(x'))) \end{aligned}$$

puis en développant et en réorganisant :

$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x', y)$.

φ est donc une forme bilinéaire antisymétrique donc alternée.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit ϕ une forme bilinéaire alternée sur E et soit f une forme linéaire de E.

Montrer que la forme $f \wedge \phi : E \times E \times E \to \mathbb{K}$ donnée par

$$(f \wedge \phi)(v_1, v_2, v_3) = f(v_1)\,\phi(v_2, v_3) + f(v_2)\,\phi(v_3, v_1) + f(v_3)\,\phi(v_1, v_2)$$

est trilinéaire alternée.

Solution de l'exercice 5. Pour v_2, v_2 fixé, on pour tout v_1, v_1' et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} & (f \wedge \phi)(v_1 + \lambda v_1', v_2, v_3) \\ & = f(v_1 + \lambda v_1')\,\phi(v_2, v_3) + f(v_2)\,\phi(v_3, v_1 + \lambda v_1') + f(v_3)\,\phi(v_1 + \lambda v_1', v_2) \\ & = f(v_1')\,\phi(v_2, v_3) + \lambda f(v_1')\,\phi(v_2, v_3) + f(v_2)\,\phi(v_3, v_1) + \lambda f(v_2)\,\phi(v_3, v_1') \\ & + f(v_3)\,\phi(v_1, v_2) + \lambda f(v_3)\,\phi(v_1', v_2) \\ & = f(v_1)\,\phi(v_2, v_3) + f(v_2)\,\phi(v_3, v_1) + f(v_3)\,\phi(v_1, v_2) \\ & + \lambda(f(v_1')\,\phi(v_2, v_3) + f(v_2)\,\phi(v_3, v_1') + f(v_3)\,\phi(v_1', v_2)) \\ & = (f \wedge \phi)(v_1, v_2, v_3) + \lambda (f \wedge \phi)(v_1', v_2, v_3) \end{aligned}$$

On montre de même la linéarité par rapport à la deuxième place (v_2) et la troisième place (v_3). Ainsi $f \wedge \phi$) est trilinéaire. Ensuite, puisque φ est alternée on voit facilement que $f \wedge \phi$) l'est aussi.

Exercice 6. Pour tous vecteurs $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$u \wedge v = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

le vecteur $u \wedge v$ est appelé produit vectoriel des vecteurs u et v. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & u \wedge v \end{array}$$

est une application bilinéaire alternée.

Solution de l'exercice 6. On montre sans problème que $\forall u, u', v$ de $\mathbb{R}^3$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$(u + \lambda u') \wedge v = (u \wedge v) + \lambda(u' \wedge v)$$

d'où la linéarité par rapport à la première place.
On montre de même linéarité par rapport à la deuxième place.

On vérifie aussi facilement que $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $v \wedge v = 0$. Donc le produit vectoriel est une application bilinéaire alternée de $\mathbb{R}^3$.

Déterminants : petits calculs pour se faire la main

Exercice 7. Calculer les déterminants suivants :

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3)\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad (5)\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \quad (6)\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(7)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (8)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (9)\begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 31 & 78 \end{vmatrix}.$$

Solution de l'exercice 7. (1) $= -5$

(2) $= -6$, matrice triangulaire,

(3) $= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 0$, développer p/r à la 3e ligne,

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

5)

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & 17 \\ 0 & \boxed{-1} & 5 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 17 \end{vmatrix} = -14$$

(6)

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \boxed{1} & -2 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -36$$

(7)

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -8\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

(8) $= -3$

(9)

$$\begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 31 & 78 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 16 & 24 & 33 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 31 & 78 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boxed{1} & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & -18 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & -18 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -27 & -3 \end{vmatrix} = -39$$

Exercice 8. Calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ de plusieurs façons :

(a) En développant suivant la première ligne.
(b) En développant suivant la première colonne.
(c) En remarquant que la 3e ligne s'écrit $(0,1,1)+(1,0,0)$.
(d) En faisant des opérations sur les lignes.

Solution de l'exercice 8. Facile !

Déterminants : plus techniques

Exercice 9. Montrer les égalités suivantes sans calculer les déterminants,

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 & 5 \\ 8 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 14 & 5 & 18 \\ 9 & 2 & 8 & 30 \\ 12 & 10 & 7 & 12 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ zx & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

Solution de l'exercice 9.

Exercice 10. (a) Les nombres 1625, 5928, 1690 et 3185 étant divisibles par 13, montrer, sans le calculer, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

est divisible par 13.

(b) Démontrer sans le calculer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

est divisible par 13×8 (on commencera par remarquer que 156, 260 et 325 sont divisibles par 13).

Solution de l'exercice 10. (a) facile.

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6+5\times 10+1\times 100 \\ 2 & 6 & 0+6\times 10+2\times 100 \\ 3 & 2 & 5+2\times 10+3\times 100 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 2 & 6 & 20 \\ 3 & 2 & 25 \end{vmatrix}$$

De même 312, 256 et 2640 sont divisibles par 8 et en opérant de manière analogue sur les lignes (faire $100 \times L3 + 10 \times L1 + L2$), on montre que le déterminant est divisible par 8. On trouve alors que ce déterminant vaut

$$(13 \times 8) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 2 & 6 & 20 \\ 39 & 32 & 330 \end{vmatrix}.$$

Exercice 11. Calculer (avec un minimum d'opérations) les déterminants suivants

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

Solution de l'exercice 11.

Exercice 12. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB, en déduire $\det B$.

Solution de l'exercice 12. Même raisonnement que l'exercice 13.

Exercice 13. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det A$.
Calculer BA, en déduire $\det B$.

Solution de l'exercice 13. On ajoute toutes les lignes à la première puis on développe par rapport à L_1 :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 16$$

Posons $\alpha = a+b+c+d, \beta = a+b-c-d, \gamma = a-b-c+d$ et $\delta = a-b+c-d$.
On constate qu'on a les égalités :

$$\Delta D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & -\gamma & -\delta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & \delta \\ \alpha & -\beta & \gamma & -\delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta D$$

Puisque $D \neq 0$, on en déduit la valeur du déterminant Δ :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$$

Déterminants : à paramètres

Exercice 14. Calculer les déterminants suivants

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

$$(3)\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \quad (4)\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$(5)\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} (6)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(7)\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}.$$

Solution de l'exercice 14. (1) $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & c-a \\ ab & a(c-b) & b(c-a) \end{vmatrix}$$

$$= (c-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 1 \\ ab & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (c-b)(c-a)(b-a)$$

(2) $L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2aL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2bL_3$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a-b-c \\ 0 & -a-b-c & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c)^3$$

(3) $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & -1 & a & c \\ -1 & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & a+b & 2c \\ 0 & 0 & 2c & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2\begin{vmatrix} a+b & 2c \\ 2c & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2(a+b-2c)(a+b+2c)$$

(4) $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ conduit à :

$$D = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & b-c-a & 0 \\ 0 & c+a-b & c-a-b \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_2 - C_1$ donne :

$$D = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & b-c-a & 2a-2b \\ 0 & c+a-b & -2a \\ a^2 & b^2 & 2ab \end{vmatrix}$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & -2b \\ 0 & c+a-b & -2a \\ a^2 & b^2 & 2ab \end{vmatrix}$$

puis en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} D =&(a+b+c)^2 \left(2ba^2(c+a-b) + 2ab^2(b+c-a)\right. \\ &\left.+ 2ab(b+c-a)(c+a-b)\right) \\ =& 2abc(a+b+c)^3. \end{aligned}$$

(5) Notons $\sigma = ab+bc+ca$et D le détérminant à calculer. On développe D par rapport à sa première ligne, en factorisant les différences de carrés :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} \\ &= (a+b)^2 \begin{vmatrix} (a+c)^2 & c^2 \\ c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} \\ &\qquad - a^2 \begin{vmatrix} a^2 & c^2 \\ b^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} \\ &\qquad\qquad + b^2 \begin{vmatrix} a^2 & (a+c)^2 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= (a+b)^2 \left(\left(\sigma + c^2\right)^2 - c^4\right) - a^2\left((\sigma - bc)^2 - (bc)^2\right) \\ &\qquad + b^2\left((ac)^2 - (\sigma - ac)^2\right) \\ &= \sigma\left((a+b)^2\left(\sigma + 2c^2\right) - a^2(\sigma - 2bc) - b^2(\sigma - 2ac)\right) \\ &= \sigma\left(2ab\sigma + 2c^2(a+b)^2 + 2abc(a+b)\right) = 2\sigma(ab\sigma + c(a+b)\sigma) = 2\sigma^3 \end{aligned}$$

Conclusion : $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} = 2(ab+bc+ca)^3$

(6)

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ 0 & a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2b^2 & a^2-c^2-b^2 & b^2 \\ a^2-b^2-c^2 & -2c^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(a^2-b^2-c^2+2bc\right)\left(a^2-b^2-c^2-2bc\right) \\ &= (a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

(7) On effectue l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_4$ et on factorise $x = a-b-c-d$ dans L_1. On retranche alors C_1 à $\mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4$, avant de développer par rapport à la première ligne :

$$D = x \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ b & -a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & -a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & -a-d \end{vmatrix}$$

$$= -x \begin{vmatrix} -a-b & d-b & c-b \\ d-c & -a-c & b-c \\ c-d & b-d & -a-d \end{vmatrix}$$

On ajoute L_1 à L_2 et à L_3, et on factorise $y = a+b+c-d$ et $z = a+b-c+d$:

$$D = -x \begin{vmatrix} -a-b & d-b & c-b \\ -a-b-c+d & -a-b-c+d & 0 \\ -a-b+c-d & 0 & -a-b+c-d \end{vmatrix}$$

$$= -xyz \begin{vmatrix} -a-b & d-b & c-b \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On retranche enfin $\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3$ à C_1, ce qui permet de conclure en notant $t = a-b+c+d$:

$$D = -xyz \begin{vmatrix} -a+b-c-d & d-b & c-b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = xyzt$$

Conclusion : $D = (a-b-c-d)(a-b+c+d)(a+b-c-d)(a+b+c-d)$.

Déterminants : avec astuces

Exercice 15. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} y^2+z^2 & yx & zx \\ xy & z^2+x^2 & zy \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det A$ (écrire d'abord A comme le produit de deux matrices).

Solution de l'exercice 15. On constate que

$$\begin{pmatrix} y^2+z^2 & yx & zx \\ xy & z^2+x^2 & zy \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ z & x & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} = M^{\mathrm{T}} M$$

Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ z & x & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix}$ est $-2xyz$. On en déduit que D est égal à $4x^2y^2z^2$.

Exercice 16. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab \\ bc+ca+ab & bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 \\ a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab & bc+ca+ab \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det A$ (écrire d'abord A comme le produit de deux matrices).

Solution de l'exercice 16. On constate que $A = JK$ avec $J = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$. Mais (faire $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$ encuite $C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1$)

$$\begin{aligned} \det J = \begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ c & a-c & b-c \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)\left((b-a)(b-c)-(a-c)(c-a)\right) \\ &= (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right) \end{aligned}$$

De plus J et K se déduissent l'une de l'autre en échangeant les indéterminées b et c. Le résultat précédent étant symétrique par rapport à a, b et c, on en tire $\det J = \det K$.

Finalement

$$\det A = (\det J)^2 = (a+b+c)^2 \left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)^2.$$

Exercice 17. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)^3 & (x_1+y_2)^3 & (x_1+y_3)^3 & (x_1+y_4)^3 \\ (x_2+y_1)^3 & (x_2+y_2)^3 & (x_2+y_3)^3 & (x_2+y_4)^3 \\ (x_3+y_1)^3 & (x_3+y_2)^3 & (x_3+y_3)^3 & (x_3+y_4)^3 \\ (x_4+y_1)^3 & (x_4+y_2)^3 & (x_4+y_3)^3 & (x_4+y_4)^3 \end{pmatrix}.$$

Ecrire A comme le produit de deux matrices. En déduire $\det A$.

Solution de l'exercice 17. Utiliser la formule di binôme de Newton pour voir que A est le produit de deux matrices ...

Exercice 18. (a) Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

(b) En déduire

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Solution de l'exercice 18.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

En retranchant à chaque ligne a fois la précédente

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

et enfin en développant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

(b) (b) En séparant la première colonne en deux

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Puis en procédant à des combinaisons judicieuses sur les colonnes

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}.$$

Enfin, par permutation des colonnes dans le deuxième déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

Exercice 19. 1. Soit $a, b, c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et

$$f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}.$$

Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

2. Généraliser à un déterminant 3×3.
3. Application : Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}.$$

Solution de l'exercice 19.

Déterminants : d'ordre $n \times n$

Exercice 20. Calculer les déterminants d'ordre n suivant

$$(a)\ \ D_n = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix}_{[n]}, \quad (b)\ \ D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}_{[n]};$$

$$(c)\ \ D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution de l'exercice 20. (a) On effectue l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \cdots + \mathrm{L}_n$, puis on factorise $x + (n-1)a$ dans L_1. Ensuite on retranche $a\ \mathrm{L}_1$ à toutes les autres lignes :

$$D_n = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a \\ a & \dots & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$= (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

Le déterminant final est triangulaire. Conclusion :

$$D_n = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

(b) Notons $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $u = (1, 1, \dots, 1)$. D_n s'écrit

$$D_n = \det_{(e)} \left((x_1 - a)\, e_1 + au, (x_2 - a)\, e_2 + au, \dots, (x_n - a)\, e_n + au \right).$$

Avec la n-linéarité, le développement de D_n se réduit à la somme suivante (tous les autres déterminants sont nuls car ils ont au moins deux colonnes identiques à au) :

$$\begin{aligned} D_n &= \det\left((x_1 - a)\, e_1, \dots, (x_n - a)\, e_n\right) \\ &\quad + a \sum_{j=1}^{n} \det\left((x_1 - a)\, e_1, \dots, (x_{j-1} - a)\, e_{j-1}, u, (x_{j+1} - a)\, e_{j+1}, \dots, (x_n - a)\, e_n\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (x_k - a) + a \sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} (x_k - a) \det\left(e_1, \dots, e_{j-1}, u, e_{j+1}, \dots, e_n\right) \end{aligned}$$

Mais $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$ donc

$$\det\left(e_1, \dots, e_{j-1}, u, e_{j+1}, \dots, e_n\right) = \det\left(e_1, \dots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_n\right) = 1$$

Ainsi $D_n = \prod_{k=1}^{n} (x_k - a) + a \sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} (x_k - a)$.

Si on note $P_n(t) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - t)$, alors $P_n'(t) = -\sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} (x_k - t)$

On en déduit une expression plus simple du résultat : $D_n = P_n(a) - aP_n'(a)$.

Remarque : si tous les x_k sont égaux à x, on a $P_n(t) = (x-t)^n$ et $P_n'(t) = -n(x-t)^{n-1}$. On en déduit

$$D_n = P_n(a) - aP_n'(a) = (x-a)^n + an(x-a)^{n-1} = (x-a)^{n-1}(x + (n-1)a)$$

et on retrouve ainsi le résultat de la question précédente.

(c) - On note $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_n$ les vecteurs-colonnes de D_n. On note $U = (1, 1, \dots, 1)$. Avec ces notations et l'indication de l'énoncé :

$$\Delta_n(t) = \det\left(\mathrm{C}_1 + tU, \mathrm{C}_2 + tU, \dots, \mathrm{C}_n + tU\right).$$

Avec la n-linéarité, le développement de $\Delta_n(t)$ se réduit à la somme suivante (les autres déterminants sont nuls car ils ont au moins deux colonnes identiques à tU) :

$$\Delta_n(t) = \det\left(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_n\right) + t \sum_{j=1}^{n} \det\left(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_{j-1}, U, \mathrm{C}_{j+1}, \dots, \mathrm{C}_n\right)$$

$\Delta_n(t)$ est donc bien une fonction affine $\alpha+\beta t$ de la variable t, dans laquelle le terme constant α représente la valeur du déterminant initial D_n. Ainsi $D_n = \Delta_n(0)$.

- On pose $t=-a$: $\Delta_n(t)$ est triangulaire inférieur, et $\Delta_n(-a) = D_n - a\beta = \prod_{k=1}^n (x_k - a)$.
- On pose $t=-b$: Alors $\Delta_n(-b) = D_n - b\beta = \prod_{k=1}^n (x_k-b)$ (déterminant triangulaire supérieur.) Puisque $a \neq b$, on en déduit :

$$D_n = \frac{b\Delta_n(-a) - a\Delta_n(-b)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\left(b\prod_{k=1}^n (x_k-a) - a\prod_{k=1}^n (x_k-b)\right)$$

- D_n est une fonction polynômiale par rapport à a et b.

En particulier, la valeur de D_n pour $b=a$ s'obtient par passage à la limite quand $b\to a$. Si on note $P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x_k-a)$, on a

$$D_n = \frac{bP_n(a) - aP_n(b)}{b-a} = P_n(a) - a\frac{P_n(b)-P_n(a)}{b-a}.$$

Si on fait tendre b vers a, alors $\frac{P_n(b)-P_n(a)}{b-a}$ tend vers $P_n'(a)$. La valeur de D_n quand $b=a$ est donc $P_n(a) - aP_n'(a)$: c'est le résultat de la question précédente.

Exercice 21. Soit (f_n) la suite de Fibonacci définie par $f_0=0, f_1=1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Calculer le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficient général $f_{|i-j|}$.

Solution de l'exercice 21. Retirer à la dernière ligne les deux lignes précédentes. Il vient $\det(A_n) = -2\det(A_{n-1})$ pour $n \geqslant 3$, puis $\det(A_n) = -(-2)^{n-1}$ si $n \geqslant 1$.

Exercice 22. Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det\left(a_{\max(i,j)}\right)$.

En déduire en particulier $\det(\max(i,j))$ et $\det(\min(i,j))$.

Solution de l'exercice 22.

$$\det\left(a_{\max(i,j)}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque colonne la précédente (en commençant par la première)

$$\det\left(a_{\max(i,j)}\right) = \begin{vmatrix} a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & a_n \\ 0 & a_2-a_3 & & a_{n-1}-a_n & a_n \\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1}-a_n & a_n \\ (0) & & & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

et donc

$$\det\left(a_{\max(i,j)}\right) = (a_1-a_2)(a_2-a_3)\dots(a_{n-1}-a_n)\,a_n.$$

Pour $a_i = i$,

$$\det\left(a_{\max(i,j)}\right) = (-1)^{n-1}n.$$

Pour $a_i = n+1-i$

$$\det\left(a_{\min(i,j)}\right) = 1$$

Exercice 23. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B = ((-1)^{i+j}a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Comparer $\det A$ et $\det B$.

Solution de l'exercice 23. Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = \left((-1)^{i+j}a_{i,j}\right)$. On a

$$\det B = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n (-1)^{\sigma(i)+i}a_{\sigma(i),i}$$

en regroupant les puissance de (-1)

$$\det B = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{i=1}^n \sigma(i)+i}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

puis

$$\det B = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{n(n+1)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

Ainsi

$$\det B = (-1)^{n(n+1)}\det A = \det A$$

car $n(n+1)$ est pair.

Déterminants : calculs par une relation de récurrence

Exercice 24. Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre n suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution de l'exercice 24. Par les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$ on obtient.

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = D_{n-2}.$$

Comme $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$, on a

$$D_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$$

Exercice 25. Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre n suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution de l'exercice 25. Par les opérations élémentaires : $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_n$ on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & (1) \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 1 & (1) & & & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

La suite (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2+2r+1=0$ de racine double -1. Sachant $D_1 = 0$ et $D_2 = -1$, on parvient à

$$D_n = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Exercice 26. Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre $n+1$ suivant

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{2n}^n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

où C_n^k est le coefficient binomial

$$C_n^k = \binom{k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Solution de l'exercice 26. En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière) on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ 0 & C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

En développant selon la première colonne

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \ldots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et en exploitant $C_p^0 = C_{p+1}^0$, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^0 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = D_n.$$

Finalement

$$D_n = 1.$$

Exercice 27. Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre n suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution de l'exercice 27. Cas $b = c$: C'est un calcul classique, on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ (pour $i = 2, \ldots, n$) pour triangulariser le déterminant et obtenir

$$\det A_n = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

Cas $b \neq c$: Posons $D_n = \det A_n$. Ã chaque ligne on retranche la précédente

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c-a & a-b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & c-a & a-b \end{vmatrix}$$

et on développe selon la dernière colonne

$$D_n = b(a-c)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \text{ avec } n \geq 2.$$

Ainsi

$$D_n = b(a-c)^{n-1} + b(a-b)(a-c)^{n-2} + \cdots + b(a-b)^{n-2}(a-c)^1 + (a-b)^{n-1}D_1.$$

Par sommation géométrique des premiers termes

$$D_n = b(a-c)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{a-b}{a-c}\right)^{n-1}}{1-\frac{a-b}{a-c}} + a(a-b)^{n-1}$$

puis après simplification

$$D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

Exercice 28. Soient $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$.
Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} s_1 & \ldots & \ldots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \ldots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution de l'exercice 28. Notons $D(s_1, \ldots, s_n)$ ce déterminant. Prouvons par récurrence sur n que

$$D(s_1, \ldots, s_n) = s_1(s_2-s_1)(s_3-s_2)\ldots(s_n-s_{n-1}).$$

On vérifie cette relation facilement pour les premières valeurs de n. Si la propriété est vraie au rang $n-1$, prouvons la au rang n en retranchant la première colonne à toutes les autres. On trouve

$$\begin{aligned} D(s_1, \ldots, s_n) &= \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_1 & s_2-s_1 & \ldots & s_2-s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2-s_1 & \ldots & s_n-s_1 \end{vmatrix} \\ &= s_1 \begin{vmatrix} s_2-s_1 & \ldots & \ldots & s_2-s_1 \\ s_2-s_1 & s_3-s_1 & \ldots & s_3-s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2-s_1 & s_3-s_1 & \ldots & s_n-s_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$D(s_1, \ldots, s_n) = s_1 D(s_2-s_1, s_3-s_1, \ldots, s_n-s_1).$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$\begin{aligned} D(s_1, \ldots, s_n) &= s_1(s_2-s_1)(s_3-s_1-s_2+s_1)\ldots(s_n-s_1-s_{n-1}+s_1) \\ &= s_1(s_2-s_1)(s_3-s_2)\ldots(s_n-s_{n-1}). \end{aligned}$$

Exercice 29. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \ldots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution de l'exercice 29. On note $\Delta_n(x)$ le déterminant recherché. On remarque, en écrivant la formule qui donne la définition du déterminant, que $\Delta_n(x)$ est un polynôme de degré exactement égal à $2n$. De plus, le terme en x^{2n} ne peut s'obtenir qu'en faisant le produit des termes diagonaux. On en déduit que le coefficient devant x^{2n} est égal à 1 . Calculons ensuite $\Delta_n(x)$ en effectuant un développement suivant la première ligne. On trouve

$$\Delta_n(x) = (1+x^2)\Delta_{n-1}(x) + x \begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

On continue en effectuant un développement suivant la deuxième colonne du déterminant restant. On trouve

$$\Delta_n(x) = (1+x^2)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x).$$

Pour trouver vraiment la valeur de $\Delta_n(x)$, on calcule les premières itérations. On a

$$\Delta_1(x) = 1+x^2, \Delta_2(x) = 1+x^2+x^4, \ldots$$

On conjecture que $\Delta_n(x) = 1+x^2+\cdots+x^{2n}$. Démontrons ceci par récurrence double. La propriété est vraie aux rangs $n=1$ et $n=2$. Si elle est vraie simultanément aux rangs $n-2$ et $n-1$, la formule de récurrence précédente montre qu'elle est aussi vraie au rang n. On obtient donc $\Delta_n(x) = 1+x^2+\cdots+x^{2n}$

Déterminants : la comatrice

Exercice 30. Soient n un entier supérieur à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Établir

(1) $\mathrm{rg}(A) = n \Longrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n$;

(2) $\mathrm{rg}(A) = n-1 \Longrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$;

(3) $\mathrm{rg}(A) \leq n-2 \Longrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0$.

(b) Montrer

$$\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det(A))^{n-1}.$$

(c) En déduire

$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)).$$

Solution de l'exercice 30. (a) Si $\mathrm{rg}(A) = n$ alors A est inversible et sa comatrice l'est alors aussi donc

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n.$$

Si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul. Par suite $\mathrm{Com}(A) = \mathrm{O}_n$ et donc

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0.$$

Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, exploitons la relation $A\,\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)\cdot \mathrm{I}_n = \mathrm{O}_n$. Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés aux matrices A et $\mathrm{Com}(A)^\top$. On a $f\circ g = 0$ donc $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Comme $\mathrm{rg}(f) = n-1, \dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et par suite $\mathrm{rg}(g) \leq 1$. Ainsi $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \leq 1$. Comme $\mathrm{rg}(A) = n-1$, il existe un déterminant extrait non nul d'ordre $n-1$ et par suite $\mathrm{Com}(A) \neq \mathrm{O}_n$. Finalement

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1.$$

(b) Comme $A\,\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)\cdot \mathrm{I}_n$ on a

$$\det(A)\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det(A))^n.$$

Si $\det(A) \neq 0$ alors

$$\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det(A))^{n-1}.$$

Si $\det(A) = 0$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \leq 1 < n$ donc

$$\det(\mathrm{Com}(A)) = 0.$$

(c) Si $\mathrm{rg}(A) = n$ alors

$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))^\top \cdot \mathrm{Com}(A) = \det(\mathrm{Com}(A))\cdot \mathrm{I}_n = \det(A)^{n-1}\cdot \mathrm{I}_n.$$

Donc

$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))^\top = \det(A)^{n-1}\,\mathrm{Com}(A)^{-1}.$$

Or $\mathrm{Com}(A)^\top \cdot A = \det(A)\cdot I_n$ donc

$$\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)\cdot A^{-1}$$

puis sachant $(B^{-1})^\top = \left(B^\top\right)^{-1}$ on a :

$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-2}A.$$

Si $\mathrm{rg}(A) \leq n-1$ et $n \geq 3$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \leq 1 \leq n-2$ donc

$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = \mathrm{O}_n.$$

Si $n = 2$ alors pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = A.$$

Exercice 31. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre, pour $n \geq 3$, l'équation $\mathrm{Com}\, A = A$.

Solution de l'exercice 31. - Le cas $A = 0$ donne une solution.

- Dans le cas où le rang de A est compris entre 1 et $n-2$, l'étude précédente montre que l'équation est impossible (sinon A serait la matrice nulle).

- Si le rang de A est $n-1$, le rang de la comatrice est $1 < n-1$: l'équation est toujours impossible.

- Si A est inversible, les solutions sont toutes les matrices A telles que $A^\top A = (\det A)I_n$. Mais on a alors $\det\left(A^\top A\right) = (\det A)^2 = \det A$, équation qui entraîne que $\det A = 1$. Les solutions sont alors les matrices A vérifiant $A^\top A = I_n$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices orthogonales.

Déterminants : des matrices par blocs

Exercice 32. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $CD = DC$.

(a) On suppose que D est inversible, établir

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

(b) Généraliser la formule au cas où D n'est plus supposée inversible.

Solution de l'exercice 32. (a) On multiplie la matrice étudiée par une matrice triangulaire par blocs afin que le produit obtenu soit lui aussi triangulaire par blocs. On a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & \mathrm{O}_n \\ -C & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ \mathrm{O}_n & D \end{pmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux. En calculant le déterminant des deux membres

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det D = \det(AD-BC)\det D$$

On conclut en simplifiant par $\det D$ ce qui est possible car $\det D \neq 0$. (b) On introduit $D_\varepsilon = D + \varepsilon \mathrm{I}_n$ et on passe à la limite quand ε tend vers 0^+ La matrice D_ε commute avec C et, pour ε assez petit et strictement positif, il s'agit d'une matrice inversible [1] ce qui permet d'écrire

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_\varepsilon \end{pmatrix} = \det\left(AD_\varepsilon - BC\right).$$

Les deux membres de cette équation correspondent à des fonctions continues (car polynomiales) de la variable ε. On conclut en passant à la limite quand ε tend vers 0^+

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

Exercice 33. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC).$$

Solution de l'exercice 33. Supposons pour commencer la matrice A inversible. Par opérations par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D - BA^{-1}C \end{pmatrix}$$

On en déduit.

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det\left(D - BA^{-1}C\right)\det A = \det\left(DA - BA^{-1}CA\right)$$

Or les matrices A et C commutent donc A^{-1} et C commutent aussi et

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det(DA - BC)$$

Supposons A non inversible. Pour p assez grand, la matrice $A_p = A + \frac{1}{p} I$ est inversible et commute avec C donc

$$\det \begin{pmatrix} A_p & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det\left(DA_p - BC\right).$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, la continuité du déterminant donne

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC).$$

Exercice 34. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ B & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

(a) A quelle condition la matrice A est-elle inversible ?
(b) Donner son inverse quand cela est possible.

Solution de l'exercice 34. (a) Par les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1, \ldots, L_{2n} = L_{2n} + L_n$,

$$\det A = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ B + \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n + B \end{vmatrix}.$$

Par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \ldots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_n - B & B \\ O_n & \mathrm{I}_n + B \end{vmatrix} = \det\left(\mathrm{I}_n - B\right)\det\left(\mathrm{I}_n + B\right).$$

Ainsi A est inversible si, et seulement si, $\mathrm{I}_n - B$ et $\mathrm{I}_n + B$ le sont (i.e. $1, -1 \notin \operatorname{Sp} B$). On aurait aussi pu étudier le noyau de A. (b) On peut présumer que l'inverse de A est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ B & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M + BN & N + BM \\ BM + N & BN + M \end{pmatrix}$$

on a

$$\begin{cases} M + BN = \mathrm{I}_n \\ BM + N = \mathrm{O}_n \end{cases} \iff \begin{cases} M = \left(\mathrm{I}_n - B^2\right)^{-1} \\ N = -B\left(\mathrm{I}_n - B^2\right)^{-1} \end{cases}$$

d'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\mathrm{I}_n - B^2\right)^{-1} & -B\left(\mathrm{I}_n - B^2\right)^{-1} \\ -B\left(\mathrm{I}_n - B^2\right)^{-1} & \left(\mathrm{I}_n - B^2\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

Déterminants : applications

Exercice 35. Soit dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3), avec $v_1 = (1, 1, \alpha)$, $v_2 = (1, \alpha, 1)$ et $v_3 = (\alpha, 1, 1)$. Dire pour quelles valeurs de α la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

Solution de l'exercice 35. Puisqu'on est en dimension 3 , la famille (e_1, e_2, e_3) est une famille libre si et seulement si c'est une base. Soit M la matrice de ses trois vecteurs, ie

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice M est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\det(M) \neq 0$. Mais on a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t+2 & 1 & t \\ t+2 & t & 1 \\ t+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (t+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (t+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} \\
&= -(t+2)(t-1)^2.
\end{aligned}$$

Exercice 36. Soient $(z_0, \ldots, z_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$\left((X-z_0)^n, (X-z_1)^n, \ldots, (X-z_n)^n\right)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$

Solution de l'exercice 36. Calculons le déterminant de cette famille (de $(n+1)$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$) par rapport à la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$. On a

$$(X-z_i)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} z_i^{n-j} X^j$$

Le déterminant recherché est donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} \binom{n}{0}(-z_0)^n & \binom{n}{0}(-z_1)^n & \cdots & \binom{n}{0}(-z_n)^n \\ \binom{n}{1}(-z_0)^{n-1} & \binom{n}{1}(-z_1)^{n-1} & \cdots & \binom{n}{1}(-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \cdots & \binom{n}{n} \end{vmatrix} = \binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n} \begin{vmatrix} (-z_0)^n & (-z_1)^n & \cdots & (-z_n)^n \\ (-z_0)^{n-1} & (-z_1)^{n-1} & \cdots & (-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

On reconnait un déterminant de Vandermonde, qui est non-nul puisque les z_i sont supposés tous distincts. La famille considérée est effectivement une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 37. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'application linéaire associée à M_α est bijective.

Solution de l'exercice 37. L'application linéaire associée à M_α est bijective si et seulement si la matrice M_α est inversible, si et seulement si le déterminant de M_α est non-nul. On calcule donc ce déterminant. En ajoutant L_3 à L_1 et $2L_3$ à L_2, on trouve :

$$\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 4.$$

L'application linéaire associée à M_α est donc bijective si et seulement si $\alpha \neq 4$.

Exercice 38. Étudier, suivant les valeurs des paramètres $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, l'inversibilité des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 38. Il suffit de calculer le déterminant. Il faut le calculer de façon suffisamment intelligente pour qu'il apparaisse immédiatement sous forme factorisée. Pour la première matrice, commencer par tout ajouter sur la première colonne.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a-2 & -1 & 0 & -1 \\ a-2 & a & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & a & -1 \\ a-2 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
&= (a-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
&= (a-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= (a-2)\begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= (a-2)a\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= a(a-2)\left((a+1)^2 - 1\right) = a^2(a-2)(a+2).
\end{aligned}$$

La matrice A est donc inversible si et seulement si $a \neq 0, 2, -2$. Pour la matrice B, on procède de la même façon, en commençant par mettre $m^2 - m = m(m-1)$ en facteur sur la dernière colonne.

$$\begin{aligned}
\det(B) &= m(m-1)\begin{vmatrix} 0 & m & m & 1 \\ 1 & m-1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= m(m-1)\begin{vmatrix} 0 & m & m & 1 \\ 1 & m-1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & m & m & 0 \\ 0 & 1 & m & -1 \end{vmatrix} (L4 - L2 \to L4) \\
&= -m(m-1)\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ m & m & 0 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} \\
&= -m^2(m-1)\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} \\
&= -m^2(m-1)\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} (C2 - C1 \to C1) \\
&= m^2(m-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m-1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -m^2(m-1)^2
\end{aligned}$$

La matrice est inversible si et seulement si $m \neq 0, 1$.