Algèbre linéaire 2 – Feuille 1
Révisions

Exercice 1. **Partie 1.** On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 16 & -2 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

(2) Calculer $(A - I_n)^2$, vérifier qu'elle est de rang 1.
Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2$.

(3) (a) Choisir un vecteur v_1 appartenant à $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2$ mais n'appartenant pas à $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

(b) Montrer que v_1 et $v_2 = (f - \operatorname{Id})(v_1)$ sont indépendants.

(c) Choisir un vecteur v_3 dans $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ tel que v_1, v_2 et v_3 soient indépendants et montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2$.

(d) Choisir un vecteur v_4 dans $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$ tel que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.
Écrire la matrice N de f dans cette base.

(4) Montrer que $(f - \operatorname{Id})^3 = (f - \operatorname{Id})^2$.

Partie 2. On considère une application linéaire g de $\mathbb{R}^4$ dans lui même telle que :

$$(\alpha) \quad \operatorname{rang}(g - \operatorname{Id})^2 = 1 \text{ et } \operatorname{rang}(g - \operatorname{Id}) \neq 1,$$
$$(\beta) \quad \operatorname{rang}(g - 2\operatorname{Id}) = 3.$$

(1) Montrer que $g - \operatorname{Id}$ n'est pas inversible.

(2) Montrer que $\operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id})^2 \cap \operatorname{Ker}(g - 2\operatorname{Id}) = \{\mathbf{0}\}$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id})^2 \oplus \operatorname{Ker}(g - 2\operatorname{Id})$.

(3) Montrer que $\operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id})^2$. Montrer qu'il existe un vecteur w_1 tel que $w_2 = (g - \operatorname{Id})(w_1) \neq 0$ et $(g - \operatorname{Id})^2(w_1) = 0$. Montrer que w_1 et w_2 sont indépendants.

(4) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de g est de la forme

$$N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\delta = 1$, et en déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id})$.

(5) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de g est a matrice N de la partie 1.

Exercice 2. **Partie 1.** Soit f l'endomorphisme $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})$.

(2) Déterminer $\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})^2$.
Vérifier que $\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})^2$.
Construire une base de $\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})^2$ qui contient la base de $\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})$ construite en (1) .

(3) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})^2$ et $\operatorname{Ker}(f - 8\operatorname{Id})$ sont supplémentaires.

(4) Fabriquer une base de $\mathbb{R}^4$ en mettant côte à côte la base de $\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})^2$ construite en (2), et une base de $\operatorname{Ker}(f - 8\operatorname{Id})$, et écrire la matrice N de f dans cette nouvelle base.

(5) En déduire que $(f - 4\operatorname{Id})^2(f - 8\operatorname{Id}) = 0$.

Partie 2. Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui même telle que

$$(\alpha) \quad (g - 4\operatorname{Id})^2(g - 8\operatorname{Id}) = 0,$$
$$(\beta) \quad \operatorname{rang}(g - 4\operatorname{Id})^2 = 1,$$
$$(\gamma) \quad (g - 4\operatorname{Id})(g - 8\operatorname{Id}) \neq 0.$$

(1) Montrer que $\operatorname{Im}(g - 8\operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(g - 4\operatorname{Id})^2$.

(2) Montrer que $\operatorname{Ker}(g - 8\operatorname{Id}) \cap \operatorname{Ker}(g - 4\operatorname{Id})^2 = \{\mathbf{0}\}$.

(3) En déduire que $\operatorname{Ker}(g - 8\operatorname{Id})$ et $\operatorname{Ker}(g - 4\operatorname{Id})^2$ sont supplémentaires.

(4) Montrer que $\operatorname{Ker}(g - 4\operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(g - 4\operatorname{Id})^2$. Montrer que cette inclusion n'est pas une égalité.

(5) Montrer que

$$\dim(\operatorname{Im}(g - 4\operatorname{Id})^2) + \dim(\operatorname{Ker}(g - 4\operatorname{Id}) \cap \operatorname{Im}(g - 4\operatorname{Id})) = \dim(\operatorname{Im}(g - 4\operatorname{Id})).$$

En déduire que $g - 4\operatorname{Id}$ est de rang 2.

(6) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$, dans laquelle la matrice de g est la matrice N trouvée dans (4) de la partie 1.

Exercice 3. **Partie 1.** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base (v_1, v_2) de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ et une base de $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

(2) $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id})$ sont-ils supplémentaires ?

(3) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

(4) Calculer A^2, puis déterminer une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f^2)$ telle que v_3 soit dans $\mathrm{Ker}(f)$.

(5) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et écrire (avec un minimum de calculs) la matrice N de f dans cette base.

(6) Montrer que $f^3 - 2f^2 = 0$.

Partie 2. On considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & g^3 - 2g^2 = 0 \\ (\beta) & g^2 - 2g \neq 0 \\ (\gamma) & \dim(\mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{Id})) = 2. \end{array}$$

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{Id})$ contient $\mathrm{Im}(g^2)$.

(2) Montrer que $\mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(g^2) = \{\mathbf{0}\}$.

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(g^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(4) Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^2)$, mais que ces deux sous-espaces sont distincts.
Quelles sont les dimensions de ces deux sous-espaces ?

(5) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de g est la matrice N (obtenue dans la partie 1).

Exercice 4. **Partie 1.** On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 7 & 0 \\ -3 & -8 & -6 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base (v_1, v_2) de $\mathrm{Ker}(f^2)$ tel que $v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.

(2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f^2)$.

(3) Déterminer une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2)$ sont supplémentaires, et déduire que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(4) Écrire la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}$.

(5) Montrer que $f^3 = f^2$.

(6) Montrer que pour tout λ différent de 0 et 1, l'application $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ est inversible.

Partie 2. On considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & (g - \mathrm{Id}) \circ g^2 = 0 \;\text{ et }\; (g - \mathrm{Id}) \circ g \neq 0 \\ (\beta) & \mathrm{rang}(g^2) = 2. \end{array}$$

(1) Montrer que $\mathrm{Im}(g^2) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$.
Quelle relation en résulte-t-il pour les rangs des applications g^2 et $g - \mathrm{Id}$?

(2) En utilisant la relation $g^2 - (g + \mathrm{Id}) \circ (g - \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, montrer que $\mathrm{Ker}(g^2) \cap \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) = \{\mathbf{0}\}$.
Quelle relation en résulte-t-il pour les rangs de g^2 et de $g - \mathrm{Id}$?

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(g^2)$ et $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(4) Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \neq \mathrm{Ker}(g^2)$. Quel est le rang de g ?

(5) On choisit un vecteur non nul v_1 de $\mathrm{Ker}(g)$, un vecteur v_2 qui est dans $\mathrm{Ker}(g^2)$ mais pas dans $\mathrm{Ker}(g)$, et deux vecteurs v_3 et v_4 indépendants dans $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$.
Justifier la possibilité d'un tel choix, montrer que ces quatre vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$, puis écrire la matrice de g dans cette base.

(6) Un choix judicieux de ces quatre vecteurs permet de retrouver la matrice N de la partie 1 ; expliquer pourquoi.

Exercice 5. **Partie 1.** On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -10 & -5 & -1 \\ 12 & 18 & 9 & 2 \\ -17 & -24 & -12 & -3 \\ 24 & 34 & 18 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

(2) Calculer $(A - I_4)^2$, vérifier qu'elle est de rang 1.
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$.

(3) Choisir un vecteur v_2 qui est dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ mais pas dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

On pose $v_3 = f(v_2) - v_2$.
Choisir un vecteur v_4 tel que (v_2, v_3, v_4) soit une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$.

(4) Choisir un vecteur v_1 de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ et montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Écrire la matrice N de f dans cette base.

(5) Montrer que $(N - I_4)^3 = (N - I_4)^2$.
En déduire trois suites $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ telles que $(\forall n), A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_4$.

Partie 2. On considère une application linéaire g de $\mathbb{R}^4$ dans lui même vérifiant :

$$(\alpha) \qquad \mathrm{rang}(g - \mathrm{Id})^2 = 1 \ \text{ et } \ \mathrm{rang}(g - \mathrm{Id}) \neq 1.$$
$$(\beta) \qquad \mathrm{rang}(g - 2\,\mathrm{Id}) = 3.$$

(1) Montrer que $(g - \mathrm{Id})$ n'est pas inversible.

(2) (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2 \cap \mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{Id}) = \{0\}$.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2$ et $\mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2$ contient $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$, et que ces deux noyaux sont différents.

(4) Soit w_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{Id})$. Soit w_2 un vecteur de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2$, qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$. On pose $w_3 = (g - \mathrm{Id})(w_2)$.
Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ de la forme (w_1, w_2, w_3, w_4).

(5) Montrer que dans une telle base la matrice de g est de la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\delta = 1$, et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$.

(6) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de g est N de la partie 1.