Algèbre linéaire 2 – Feuille 1
Révisions

Exercice 1. **Partie 1.** On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 16 & -2 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

(2) Calculer $(A - I_n)^2$, vérifier qu'elle est de rang 1.
Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2$.

(3) (a) Choisir un vecteur v_1 appartenant à $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2$ mais n'appartenant pas à $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

(b) Montrer que v_1 et $v_2 = (f - \operatorname{Id})(v_1)$ sont indépendants.

(c) Choisir un vecteur v_3 dans $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ tel que v_1, v_2 et v_3 soient indépendants et montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2$.

(d) Choisir un vecteur v_4 dans $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$ tel que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.
Écrire la matrice N de f dans cette base.

(4) Montrer que $(f - \operatorname{Id})^3 = (f - \operatorname{Id})^2$.

Partie 2. On considère une application linéaire g de $\mathbb{R}^4$ dans lui même telle que :

$$(\alpha) \quad \operatorname{rang}(g - \operatorname{Id})^2 = 1 \text{ et } \operatorname{rang}(g - \operatorname{Id}) \neq 1,$$
$$(\beta) \quad \operatorname{rang}(g - 2\operatorname{Id}) = 3.$$

(1) Montrer que $g - \operatorname{Id}$ n'est pas inversible.

(2) Montrer que $\operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id})^2 \cap \operatorname{Ker}(g - 2\operatorname{Id}) = \{\mathbf{0}\}$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id})^2 \oplus \operatorname{Ker}(g - 2\operatorname{Id})$.

(3) Montrer que $\operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id})^2$. Montrer qu'il existe un vecteur w_1 tel que $w_2 = (g - \operatorname{Id})(w_1) \neq 0$ et $(g - \operatorname{Id})^2(w_1) = 0$. Montrer que w_1 et w_2 sont indépendants.

(4) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de g est de la forme

$$N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\delta = 1$, et en déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id})$.

(5) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de g est a matrice N de la partie 1.

Solution de l'exercice 1. **Partie 1.**

1. La matrice de $f - \operatorname{Id}$ dans la base naturelle est

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 16 & -2 & -6 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réduisons la par la méthode du pivot, nous obtenons (avec certains choix de pivots, pivots encadrés)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \boxed{-1} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang (dim de l'image) est 2 , c'est à dire le nombre de pivots. Donc, d'après la théorème du rang, le noyau est de dimension $4 - \operatorname{rang}(f - \operatorname{Id}) = 2$. Soit $v = (x, u, z, t) \in \mathbb{R}^3$. On a alors

$$v = (x, u, z, t) \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \phantom{{}-y} - 2z - t = 0 \\ 3x - y - z \phantom{{}-t} = 0 \end{cases}$$

(d'après la réduction de Gauss les variables t et y sont principales et les autres sont secondaires) d'où

$$v = (x, u, z, t) \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2z = t \\ 3x - z = y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{aligned} v &= (x, y, z, t) = (x, 3x - z, z, 5x - 2z) \\ &= x(1, 3, 0, 5) + z(0, -1, 1, -2) \end{aligned}$$

Les deux vecteurs $u_1 = (1, 3, 0, 5)$ et $u_2 = (0, -1, 1, -2)$ sont indépendants (car ils sont évidemment non colinéaires) donc ils forment une base de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ (qui est, on le sait, de dimension 2).

Attention, si vous avez une autre réduction, vous ne trouverez pas les mêmes vecteurs de base. Mais ceux que vous trouvez doivent être des combinaisons linéaires de ceux que je viens d'écrire, et inversement.

2. On a

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & -1 \\ 20 & 0 & -8 & -4 \\ 5 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est de rang 1 parce qu'elle est non nulle, et que ses lignes sont proportionnelles. Il en résulte que le noyau de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2 = 4 - 1 = 3$.

La réduction de $(A - I_4)^2$ donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

Donc si $v = (x, u, z, t) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} v = (x, u, z, t) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) &\Leftrightarrow t = 5x - 2z \\ &\Leftrightarrow v = (x, y, z, 5x - 2z) \\ &\Leftrightarrow v = x(1, 0, 0, 5) + y(0, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, -2) \end{aligned}$$

Les trois vecteurs e_2, $w_1 = (1, 0, 0, 5)$ et $w_2 = (0, 0, 1, -2)$ sont indépendants (facile à vérifier), ils sont dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ qui est de dimension 3 , donc ils en forment une base.

3. (a) Le vecteur $v_1 = e_2$ est dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$. Puisque $v_2 = (f - \mathrm{Id})(v_1) = (-1, -1, -2, -1)$ est non nul v_1 n'est pas dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$; $(f - \mathrm{Id})(v_2) = (f - \mathrm{Id})^2 (v_1) = \mathbf{0}$, donc v_2 est dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Ils sont indépendants car non colinéaires.

(b) Choisissons un vecteur de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, par exemple $v_3 = u_1 = (1, 3, 0, 5)$; on vérifie que (v_1, v_2, v_3) sont indépendants (s'ils ne l'étaient pas on remplacerait u_1 par un autre vecteur de $\mathrm{Ker}\, f - \mathrm{Id})$, par exemple u_2), ils sont tous trois dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ (puisque $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$), il en résulte qu'ils forment une base de l'espace $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ (qui est de dimension 3).

(c) Un calcul analogue à celui de 1. montre que $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ est de dimension 1 et engendré par $v_4 = (2, 1, 4, 1)$. Ensuite il est facile de vérifier que les quatre vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 sont indépendants (trouver 4 pivots dans la réduite de Gauss des coefficients des vecteurs), ils forment donc une $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^4$.

Par construction on a

$f(v_1) = v_1 + v_2 =$, car $v_2 = (f - \mathrm{Id})(v_1)$;

$f(v_2) = f((f - \mathrm{Id})(v_1)) = (f - \mathrm{Id})((f - \mathrm{Id})(v_1)) + (f - \mathrm{Id})(v_1) = (f - \mathrm{Id})^2(v_1) + v_2 = v_2$ car $v_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$;

$f(v_3) = v_3$ car $v_3 = u_1$ et $u_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$;

$f(v_4) = 2v_4$, car $v_4 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

Donc la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) est

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Pour montrer que $(f - \mathrm{Id})^3 = (f - \mathrm{Id})^2$, on montre soit que $(A - I_4)^3 = (A - I_4)^2$ (en faisant le calcul dans la base initiale), soit que $(N - I_4)^3 = (N - I_4)^2$ (en faisant le calcul dans la nouvelle base : utilisez la formule de changement de bases : $A = PNP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$). Ce second calcul est beaucoup plus facile (car la matrice $N - I_4$ comporte beaucoup de zéros), c'est donc ce second calcul que nous ferons.

Partie 2.

1. Raisonnons par l'absurde. Si l'endomorphisme $g - \mathrm{Id}$ est inversible (bijectif), alors $(g - \mathrm{Id})^2$ l'est aussi et par suite son rang est égal à 4 ; ce qui est faux puisque $\mathrm{rg}(g - \mathrm{Id})^2 = 1$. C'est donc que $g - \mathrm{Id}$ n'est pas inversible.

On remarquera que ceci implique que le rang de $g - \mathrm{Id}$ n'est pas égal à 4. Comme il n'est pas égal à 0 ($g - \mathrm{Id} \neq 0$, puisque $(g - \mathrm{Id})^2 \neq 0$), ni à 1 (hypothèse (α), c'est qu'il est égal à 3 ou à 2 . Ce n'est qu'à la fin de 4. que l'on montrera que ce rang est 2 (et non 3).

2. Soit $v \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2 \cap \mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{Id})$. Alors $g(v) = 2v$ (car $v \in \mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{Id})$). On a donc

$$(g - \mathrm{Id})^2(v) = (g - \mathrm{Id})[g(v) - v] = (g - \mathrm{Id})(2v - v) = g(v) - v = v.$$

Et puisque v est dans $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2$, ceci implique que v est nul.

Puisque $\mathrm{rang}(g - \mathrm{Id})^2 = 1$, la dimension de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2$ est $3(= 4 - 1)$. Puisque $\mathrm{rang}(g - 2\,\mathrm{Id}) = 1$ $(= 4 - 3)$, la dimension de $\mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{Id})$ est 1. Donc la somme des dimensions de ces deux noyaux est 4 , et comme leur intersection est réduite à $\{0\}$, c'est qu'ils sont supplémentaires.

3. Soit v dans $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$, alors $(g - \mathrm{Id})(v) = 0$; donc

$$(g - \mathrm{Id})^2(v) = (g - \mathrm{Id})[(g - \mathrm{Id})(v)] = (g - \mathrm{Id})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Ce qui prouve que v est dans $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2$.

D'après l'hypothèse (α), $\dim \mathrm{Ker(g - Id)}^2 = 3$. Et d'après les remarques faites à la fin de la question 1. $\dim \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) \in \{1, 2\}$. Donc $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2$ est strictement plus gros que $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$. Il existe donc un vecteur w_1 qui est dans $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2$ et n'est pas dans $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$. On a alors $w_2 =$

$(g-\mathrm{Id})(w_1) \neq 0$ (puisque w_1 n'est pas dans $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$), tandis que $(g-\mathrm{Id})(w_2) = (g-\mathrm{Id})^2(w_1) = 0$ (puisque w_1 est dans $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$).

Pour montrer que w_1 et w_2 sont indépendants, considérons une relation du type $\alpha w_1 + \beta w_2 = \mathbf{0}$. Appliquons lui $g-\mathrm{Id}$, nous obtenons $\alpha w_2 = \mathbf{0}$. Puisque $w_2 \neq \mathbf{0}$, c'est que $\alpha = 0$. Mais alors la relation initiale s'écrit $\beta w_2 = \mathbf{0}$, ce qui implique $\beta = 0$. Ainsi $\alpha w_1 + \beta w_2 = \mathbf{0}$ implique $\alpha = \beta = 0$; ce qui signifie que w_1 et w_2 sont indépendants.

4. Les vecteurs w_1 et w_2 sont indépendants dans $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$ qui est de dimension 3 ; donc, d'après le théorème de la base incomplète, on peut trouver un vecteur w_3 tel que $(w_1; w_2, w_3)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$. Soit w_0 une base de $\mathrm{Ker}(g-2\,\mathrm{Id})$ (qui est de dimension 1). Alors (w_0, w_2, w_1, w_3) est une base de $\mathbb{R}^4$ (d'après la question b).
Ecrivons la matrice de g dans cette base. Nous connaissons ses trois premières colonnes puisque $g(w_0) = 2w_0$, $g(w_2) = w_2$ et $g(w_1) - w_1 = w_2$. La dernière colonne est à priori inconnue et dépend du choix de w_3. D'où

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

Dans cette base la matrice de $(g-\mathrm{Id})^2$ est

$$(N - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha\delta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma + \beta(\delta - 1) \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(\delta - 1) \\ 0 & 0 & 0 & (\delta - 1)^2 \end{pmatrix}.$$

Or d'après l'hypothèse (α) cette matrice doit être de rang 1, ceci implique que $\delta - 1$ soit nul (pour que $(\delta - 1)^2$ soit nul) et aussi $\gamma = 0$ (pour que $\gamma + \beta(\delta - 1)$ soit nul). On a alors

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$N - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

5. Reprenons la construction de la base. Puisque $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$ est de dimension 2, nous allons choisir pour w_3 un vecteur de $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$ indépendant de w_2. Alors les vecteurs (w_1, w_2, w_3) sont indépendants. En effet si $aw_1 + bw_2 + cw_3 = \mathbf{0}$, alors (en prenant l'image par $g-\mathrm{Id}$) $aw_2 = \mathbf{0}$, donc $a = 0$; et il reste $bw_2 + cw_3 = \mathbf{0}$ qui implique $b = c = 0$ (puisque w_2 et w_3 sont une base de $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$).

Les vecteurs w_1, w_2, w_3 forment donc une base de $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$. Dans la base (w_0, w_1, w_2, w_3) ainsi définie la matrice de g s'écrit

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour retrouver la matrice N de la partie 1, il suffit de permuter les vecteurs de précédente base, c-à-d. de considérer la base (w_2, w_1, w_3, w_0). Ainsi dans cette base la matrice de g est

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. **Partie 1.** Soit f l'endomorphisme $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id})$.
(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id})^2$.
Vérifier que $\mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id})^2$.
Construire une base de $\mathrm{Ker}(f-4\,\mathrm{Id})^2$ qui contient la base de $\mathrm{Ker}(f-4\,\mathrm{Id})$ construite en (1) .
(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id})^2$ et $\mathrm{Ker}(f - 8\,\mathrm{Id})$ sont supplémentaires.
(4) Fabriquer une base de $\mathbb{R}^4$ en mettant côte à côte la base de $\mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id})^2$ construite en (2), et une base de $\mathrm{Ker}(f - 8\,\mathrm{Id})$, et écrire la matrice N de f dans cette nouvelle base.
(5) En déduire que $(f - 4\,\mathrm{Id})^2(f - 8\,\mathrm{Id}) = 0$.

Partie 2. Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui même telle que

$$(\alpha)\quad (g-4\,\mathrm{Id})^2(g-8\,\mathrm{Id})=0,$$
$$(\beta)\quad \mathrm{rang}(g-4\,\mathrm{Id})^2=1,$$
$$(\gamma)\quad (g-4\,\mathrm{Id})(g-8\,\mathrm{Id})\neq 0.$$

(1) Montrer que $\mathrm{Im}(g-8\,\mathrm{Id})\subset\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})^2$.
(2) Montrer que $\mathrm{Ker}(g-8\,\mathrm{Id})\cap\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})^2=\{\mathbf{0}\}$.
(3) En déduire que $\mathrm{Ker}(g-8\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})^2$ sont supplémentaires.
(4) Montrer que $\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})\subset\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})^2$. Montrer que cette inclusion n'est pas une égalité.
(5) Montrer que

$$\dim(\mathrm{Im}(g-4\,\mathrm{Id})^2)+\dim(\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})\cap\mathrm{Im}(g-4\,\mathrm{Id}))=\dim(\mathrm{Im}(g-4\,\mathrm{Id})).$$

En déduire que $g-4\,\mathrm{Id}$ est de rang 2.
(6) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$, dans laquelle la matrice de g est la matrice N trouvée dans (4) de la partie 1.

Solution de l'exercice 2. **Partie 1.**

1. Le rang de $f-4\,\mathrm{Id}$ est 2 ; le noyau est de dimension 2 ; il admet pour base les deux vecteurs $v=(0,1,-1,0)$ et $w=(1,2,0,1)$. Si vous n'avez pas fait la même réduction que moi vous aurez une autre base ; vérifiez que les vecteurs que vous trouvez sont combinaisons linéaires des miens, et inversement.

2. Le noyau de $(f-4\,\mathrm{Id})^2$ contient $\mathrm{Ker}(f-4\,\mathrm{Id})$ (car si $(f-4\,\mathrm{Id})(x)=\mathbf{0}$, alors $(f-4\,\mathrm{Id})^2(x)=\mathbf{0}$). Pour le déterminer, on calcule $(A-4I_4)^2$; il admet pour base (v,w,x), où $x=(1,0,0,-1)$.

3. Le noyau de $f-8\,\mathrm{Id}$ est de dimension 1 , il est engendré par $y=(4,2,1,1)$.
Pour vérifier que $\mathrm{Ker}(f-8\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f-4\,\mathrm{Id})^2$ sont supplémentaires, le plus simple est de vérifier que les vecteurs (v,w,x,y) forment une base de $\mathbb{R}^4$ (c'est à dire qu'ils sont indépendants).

4. La matrice de f dans cette base est de la forme

$$N=\begin{pmatrix}4&0&\alpha&0\\0&4&\beta&0\\0&0&4&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$$

Les colonnes 1,2 et 3 expriment $f(v)=4v$ (car v est dans $\mathrm{Ker}(f-4\,\mathrm{Id})$), $f(w)=4w$ (car w est dans $\mathrm{Ker}(f-4\,\mathrm{Id})$ et $f(y)=8y$ (y est dans $\mathrm{Ker}(f-8\,\mathrm{Id})$). La troisième colonne exprime que $(f-4\,\mathrm{Id})^2(x)=\mathbf{0}$, c'est à dire que $(f-4\,\mathrm{Id})(x)\in\mathrm{Ker}(f-4\,\mathrm{Id})$; ce qui signifie que $(f-4\,\mathrm{Id})(x)=f(x)-4x$ est de la forme $\alpha v+\beta w$.

Il reste à calculer α et β, ce qui est facile. On calcule $f(x)-4x=(4,4,4,4)$. Ce qui donne immédiatement $\alpha=-4$ et $\beta=4$. D'autres choix de v, w et x donnent d'autres valeurs de α et β.

5. Pour montrer la relation, on se place dans une base et on fait le calcul matriciel correspondant. Bien entendu on se place dans la base (v,w,x,y) pour que les calculs soient plus faciles.

Partie2

1. Soit $x\in\mathrm{Im}(g-8\,\mathrm{Id})$, alors il existe y dans $\mathbb{R}^4$ tel que $(g-8\,\mathrm{Id})(y)=x$. On a alors

$$(g-4\,\mathrm{Id})^2(x)=(g-4\,\mathrm{Id})^2(g-8\,\mathrm{Id})(y)=\mathbf{0}$$

Donc x est dans $\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})^2$. Ce qui démontre l'inclusion cherchée.

2. Soit x un vecteur de l'intersection, on a $g(x)=8x$ (car $x\in\mathrm{Ker}(g-8\,\mathrm{Id})$) et $(g-4\,\mathrm{Id})^2(x)=0$. De ces deux relations on déduit

$$\mathbf{0}=(g-4\,\mathrm{Id})^2(\mathrm{x})=(g-4\,\mathrm{Id})(8x-4x)=4(g-4\,\mathrm{Id})(x)=4(8x-4x)=16x$$

Ce qui implique $x=\mathbf{0}$. Donc l'intersection des deux sous-espaces est réduite à $\{\mathbf{0}\}$.

3. Puisque les deux sous espaces ont une intersection réduite à $\{\mathbf{0}\}$, pour montrer qu'ils sont supplémentaires, on va vérifier que la somme de leurs dimensions est 4. Pour cela on remarque que l'inclusion de 1. implique

$$4-\dim\mathrm{Ker}(g-8\,\mathrm{Id})\leq\dim\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})^2.$$

Autrement dit la somme des deux dimensions est au moins égale à 4 . Elle n'est pas plus grande que 4, car, d'après la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned}&\dim\mathrm{Ker}(g-8\,\mathrm{Id})+\dim\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})^2\\&=\dim\left(\mathrm{Ker(g-8Id)}+\mathrm{Ker(g-4Id)^2}\right)-\dim\left(\mathrm{Ker(g-8Id)}\cap\mathrm{Ker(g-4Id)^2}\right.\\&\leq\dim\mathbb{R}^4-\dim\{0\}\end{aligned}$$

4. L'inclusion est classique : Soit x dans $\mathrm{Ker}\,\varphi$, alors $\varphi(x)=0$, donc $\varphi(\varphi(x))=\varphi^2(x)=0$. Donc x est dans $\mathrm{Ker}\,\varphi^2$.

Pour montrer qu'elle est stricte on raisonne par l'absurde. Si ces deux noyaux étaient égaux, on aurait $\mathrm{Im}(g-8\,\mathrm{Id})\subset\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})$. Il en résulterait que $(g-4\,\mathrm{Id})(g-8\,\mathrm{Id})=0$. Ce qui est contraire à l'hypothèse (γ).

5. Notons φ la restriction de g à $\mathrm{Im}(g-4\,\mathrm{Id})$. C'est une application de $\mathrm{Im}(g-4\,\mathrm{Id})$ dans lui même. Nous avons donc $\dim\mathrm{Im}\,\varphi+\dim\mathrm{Ker}\,\varphi=\dim\mathrm{Im}(g-4\,\mathrm{Id})$. Il reste à démontrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi=\mathrm{Im}(g-4\,\mathrm{Id})\cap\mathrm{Ker}(g-4\,\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}\,\varphi=\mathrm{Im}(g-4\,\mathrm{Id})^2$.

Les éléments de $\operatorname{Ker}\varphi$ sont les éléments de $\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})$ qui sont annulés par φ, c'est à dire par $g-4\operatorname{Id}$. Ce sont donc les éléments de $\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})$ qui sont dans $\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})$; autrement dit les éléments de $\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})\cap\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})$.

Soit x dans $\operatorname{Im}\varphi$, alors il existe y dans $\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})$ tel que $(g-4\operatorname{Id})(y)=\varphi(y)=x$. Mais puisque y est dans $\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})$, il existe z dans $\mathbb{R}^4$ tel que $(g-4\operatorname{Id})(z)=y$. D'où $(g-4\operatorname{Id})^2(z)=x$. Ce qui prouve que x est dans l'image de $(g-4\operatorname{Id})^2$, et montre l'inclusion $\operatorname{Im}\varphi\subset\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})^2$.
Réciproquement si x est dans $\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})^2$, il existe z tel que $(g-4\operatorname{Id})^2(z)=x$. Alors $y=(g-4\operatorname{Id})(z)$ est un élément de $\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})$ tel que $(g-4\operatorname{Id})(y)=\varphi(y)=x$. Donc x est dans $\operatorname{Im}\varphi$, ce qui prouve l'inclusion $\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})^2\subset\operatorname{Im}\varphi$.

D'après 4. $\dim\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})<\dim\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})^2=3$ (d'après l'hypothèse (γ)). C'est à dire que $\dim\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})\leq 2$. Par ailleurs l'inclusion stricte $\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})\subset\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})^2$ montre qu'il existe au moins un x tel que $(g-4\operatorname{Id})(x)\neq\mathbf{0}$, et $(g-4\operatorname{Id})^2(x)=\mathbf{0}$; alors l'élément $y=(g-4\operatorname{Id})(x)\neq\mathbf{0}$ est dans $\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})\cap\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})$. Donc ce sous-espace n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}\}$, il est de dimension au moins 1. Compte tenu du fait que $\dim\operatorname{Im}(g-4\operatorname{Id})^2=1$ (hypothèse (γ)), la formule démontrée au début de la question nous dit alors que $\dim\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})\geq 1+1=2$. Et nous avons bien démontré que cette dimension est 2 .

6. Nous savons maintenant que $\dim\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})=2$ (question 5.), $\dim\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})^2=3$ (hypothèse (γ)) et $\operatorname{Ker}(g-8\operatorname{Id})=1$ (question 3). Nous pouvons alors faire la construction suivante :

Choisissons une base (v,w) de $\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})$; choisissons un vecteur x de $\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})^2$ de façon que (v,w,x) soit une base de ce dernier espace. Choisissons une base y de $\operatorname{Ker}(g-8\operatorname{Id})$. Alors $(v,w,w;y)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (puisque $\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})^2$ et $\operatorname{Ker}(g-8\operatorname{Id})$ sont supplémentaires). Dans cette base la matrice de g s'écrit (cf : question Partie 1. 4.) :

$$N=\begin{pmatrix}4&0&a&0\\0&4&b&0\\0&0&4&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$$

Notons que dans cette matrice a et b ne sont pas tous deux nuls ; car s'ils étaient nuls, x serait dans $\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})$, et cet espace serait de dimension 3, ce qui n'est pas.

On veut faire en sorte que $a=-4$ et $b=4$. Pour cela il suffit, x étant donné, de changer la base (v,w) de $\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})$: Le vecteur $(g-4\operatorname{Id})(x)=av+bw$ est non nul, donc il existe une base (v',w') du plan $\operatorname{Ker}(g-4\operatorname{Id})$ dans laquelle les coordonnées de ce vecteur sont -4 et 4 (c'est à peu près évident ; faire une figure). Dans la base (v',w',x,y) la matrice de g sera la matrice N de la partie 1. 4.

Exercice 3. Partie 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix}-4&-4&2&0\\3&2&-3&0\\-2&0&4&0\\1&0&-1&2\end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base (v_1,v_2) de $\operatorname{Ker}(f-2\operatorname{Id})$ et une base de $\operatorname{Im}(f-2\operatorname{Id})$.
(2) $\operatorname{Ker}(f-2\operatorname{Id})$ et $\operatorname{Im}(f-2\operatorname{Id})$ sont-ils supplémentaires ?
(3) Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.
(4) Calculer A^2, puis déterminer une base (v_3,v_4) de $\operatorname{Ker}(f^2)$ telle que v_3 soit dans $\operatorname{Ker}(f)$.
(5) Montrer que $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et écrire (avec un minimum de calculs) la matrice N de f dans cette base.
(6) Montrer que $f^3-2f^2=0$.

Partie 2. On considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}&(\alpha)&&g^3-2g^2=0\\&(\beta)&&g^2-2g\neq 0\\&(\gamma)&&\dim(\operatorname{Ker}(g-2\operatorname{Id}))=2.\end{aligned}$$

(1) Montrer que $\operatorname{Ker}(g-2\operatorname{Id})$ contient $\operatorname{Im}(g^2)$.
(2) Montrer que $\operatorname{Ker}(g-2\operatorname{Id})\cap\operatorname{Ker}(g^2)=\{\mathbf{0}\}$.
(3) Montrer que $\operatorname{Ker}(g-2\operatorname{Id})$ et $\operatorname{Ker}(g^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
(4) Montrer que $\operatorname{Ker}(g)\subset\operatorname{Ker}(g^2)$, mais que ces deux sous-espaces sont distincts.
Quelles sont les dimensions de ces deux sous-espaces ?
(5) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de g est la matrice N (obtenue dans la partie 1).

Solution de l'exercice 3. Eléments de réponses :
Partie 1.
- $\operatorname{Ker}(f-2\operatorname{Id})=\operatorname{Vect}((1,-1,1,0),(0,0,0,1))$,
- $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}(1,-3/4,1/2,-1/4)$,

- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 12 & 0 \\ 0 & -8 & -12 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f^2) &= \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(0,-3/4,1/2,-1/4)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(1,-3/4,1/2,-1/4)' \end{aligned}$
- $v_1 = (1,-1,1,0), v_2 = (0,0,0,1), v_3 = (1,-3/4,1/2,-1/4), v_4 = (1,0,0,0)$
- $f(v_1) = 2v_1,\ f(v_2) = 2v_2,\ f(v_3) = 0,\ f(v_4) = -4v_3$
- $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4. **Partie 1.** On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 7 & 0 \\ -3 & -8 & -6 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base (v_1, v_2) de $\mathrm{Ker}(f^2)$ tel que $v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.
(2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f^2)$.
(3) Déterminer une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2)$ sont supplémentaires, et déduire que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(4) Écrire la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}$.
(5) Montrer que $f^3 = f^2$.
(6) Montrer que pour tout λ différent de 0 et 1, l'application $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ est inversible.

Partie 2. On considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & (g - \mathrm{Id}) \circ g^2 = 0 \ \text{ et } \ (g - \mathrm{Id}) \circ g \neq 0 \\ (\beta) & \mathrm{rang}(g^2) = 2. \end{array}$$

(1) Montrer que $\mathrm{Im}(g^2) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$.
Quelle relation en résulte-t-il pour les rangs des applications g^2 et $g - \mathrm{Id}$?
(2) En utilisant la relation $g^2 - (g + \mathrm{Id}) \circ (g - \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, montrer que $\mathrm{Ker}(g^2) \cap \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) = \{\mathbf{0}\}$.
Quelle relation en résulte-t-il pour les rangs de g^2 et de $g - \mathrm{Id}$?
(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(g^2)$ et $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
(4) Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \neq \mathrm{Ker}(g^2)$. Quel est le rang de g ?
(5) On choisit un vecteur non nul v_1 de $\mathrm{Ker}(g)$, un vecteur v_2 qui est dans $\mathrm{Ker}(g^2)$ mais pas dans $\mathrm{Ker}(g)$, et deux vecteurs v_3 et v_4 indépendants dans $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$.
Justifier la possibilité d'un tel choix, montrer que ces quatre vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$, puis écrire la matrice de g dans cette base.
(6) Un choix judicieux de ces quatre vecteurs permet de retrouver la matrice N de la partie 1 ; expliquer pourquoi.

Solution de l'exercice 4. Eléments de réponses :

Partie 1.

- $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1,-1,1,0),(0,0,0,1))$,
- $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1,-3/4,1/2,-1/4)$,
- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$
- $\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f^2) &= \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(0,1,-2/3,1/3) \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(1,0,0,0) - 3/4(0,1,-2/3,1/3)), \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(1,-3/4,1/2,-1/4) \end{aligned}$
- $v_1 = (1,-1,1,0), v_2 = (0,0,0,1), v_3 = (1,-3/4,1/2,-1/4), v_4 = (1,0,0,0)$
- $f(v_1) = v_1,\ f(v_2) = v_2,\ f(v_3) = 0,\ f(v_4) = 4v_3$
- $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5. **Partie 1.** On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -10 & -5 & -1 \\ 12 & 18 & 9 & 2 \\ -17 & -24 & -12 & -3 \\ 24 & 34 & 18 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
(2) Calculer $(A - I_4)^2$, vérifier qu'elle est de rang 1.
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$.
(3) Choisir un vecteur v_2 qui est dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ mais pas dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

On pose $v_3 = f(v_2) - v_2$.
Choisir un vecteur v_4 tel que (v_2, v_3, v_4) soit une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})^2$.

(4) Choisir un vecteur v_1 de $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})$ et montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Écrire la matrice N de f dans cette base.

(5) Montrer que $(N - I_4)^3 = (N - I_4)^2$.
En déduire trois suites $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ telles que $(\forall n), A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_4$.

Partie 2. On considère une application linéaire g de $\mathbb{R}^4$ dans lui même vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & \mathrm{rang}(g-\mathrm{Id})^2 = 1 \text{ et } \mathrm{rang}(g-\mathrm{Id}) \neq 1. \\ (\beta) & \mathrm{rang}(g-2\,\mathrm{Id}) = 3. \end{array}$$

(1) Montrer que $(g-\mathrm{Id})$ n'est pas inversible.

(2) (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2 \cap \mathrm{Ker}(g-2\,\mathrm{Id}) = \{0\}$.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$ et $\mathrm{Ker}(g-2\,\mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$ contient $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$, et que ces deux noyaux sont différents.

(4) Soit w_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(g-2\,\mathrm{Id})$. Soit w_2 un vecteur de $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$, qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$. On pose $w_3 = (g-\mathrm{Id})(w_2)$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ de la forme (w_1, w_2, w_3, w_4).

(5) Montrer que dans une telle base la matrice de g est de la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\delta = 1$, et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$.

(6) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de g est N de la partie 1.

Solution de l'exercice 5. Eléments de réponses :

Partie 1.

- $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1,0,-2,3),(0,1,-3,5))$,
- $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1,-3/2,2,-3)$,
- $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -10 & -14 & -8 & -2 \\ 15 & 21 & 12 & 3 \\ -20 & -28 & -16 & -4 \\ 30 & 42 & 24 & 6 \end{pmatrix}$
- $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}((1,0,0,-5),(0,1,0,-7),(0,0,1,-4))$
- On choisit $v_2 = ((1,0,0,-5))$, donc $v_3 = f(v_2) - v_2 = (-2,2,-2,4) \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})^2$.

On choisit $v_4 = (0,0,1,-4) \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})^2$, donc (v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})^2$. Finalement $v_1 = (1,-3/2,2,-3) \in \mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})$. On vérifie facilement que $(v_1, v2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

- $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = v_2 + v_3$, $f(v_3) = v_3$, il nous reste à calculer $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4. Un calcul directe donne $f(v_4) = (-1,1,0,-2)$ et on remarque que $(-1,1,0,-2) = 1/2(-2,2,-2,4) + (0,0,1,-4)$, donc $f(v_4) = 1/2v_3 + v_4$.
- $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$