EXERCICE TYPE : APPLICATION LINÉAIRE

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f((x,y,z)) = (x+2y+z, y-x, 2x+y+z). \tag{1}$$

(a) Montrons que f est linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit deux vecteurs $u = (x,y,z), v = (x',y',z')$ de $\mathbb{R}^3$. On forme d'abord le vecteur $\lambda u + v$, soit

$$\lambda u + v = \lambda(x,y,z) + (x',y',z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

ensuite on calcule l'image de ce vecteur par f en utilisant la définition de f :

$$\begin{aligned}
f(\lambda u + v) &= f\left((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')\right) \\
&= ((\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z'), (\lambda y + y') - (\lambda x + x'), 2(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z')) \\
&= (\lambda(x+2y+z) + (z'+2y'+z'), \lambda(y-x) + (y'-x'), \lambda(2x+y+z) + (2x'+y'+z')) \\
&= (\lambda(x+2y+z), \lambda(y-x), \lambda(2x+y+z)) + (z'+2y'+z', y'-x', 2x'+y'+z') \\
&= \lambda\left(x+2y+z, y-x, 2x+y+z\right) + (z'+2y'+z', y'-x', 2x'+y'+z') \\
&= \lambda f((x,y,z)) + f((x',y',z')) \\
&= \lambda f(u) + f(v)
\end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, c'est un endomoprphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminons une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathbf{Ker}\, f &\iff f((x,y,z)) = (0,0,0) \\
&\iff (x+2y+z, y-x, 2x+y+z) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \qquad (\Sigma_1)
\end{aligned}$$

D'autre part, soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
(a,b,c) \in \mathbf{Im}\, f &\iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f((x,y,z)) = (a,b,c) \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + z = a \\ -x + y = b \\ 2x + y + z = c \end{cases} \qquad (\Sigma_2)
\end{aligned}$$

Nous allons donc déterminer en même temps $\mathbf{Ker}\, f$ et $\mathbf{Im}\, f$ en résolvant les systèmes linéaires (Σ_1) et (Σ_2). Utilisons pour cela la méthode de Gauss (sur un seul tableau)

$$\begin{array}{rrr|r|l} 1 & 2 & 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 2 & 1 & 1 & 0 & c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrr|r|r} 1 & 2 & \boxed{1} & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & -1 & 0 & 0 & c-a \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrr|r|r} 0 & 3 & \boxed{1} & 0 & 2a-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+b-a \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & c-a \end{array}$$

1. D'après cette réduction de Gauss on voit que

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathbf{Ker}\, f &\iff z = -3y, x = y \\
&\iff (x,y,z) = y(1,1,-3) \\
&\iff (x,y,z) \in \mathrm{Vect}(1,1,-3)
\end{aligned}$$

   Donc $\mathbf{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(1,1,-3)$, c'est un sous-espace de dimension 1.
2. La 2ème ligne de la réduite de Gauss donne l'équation qui caractérise $\mathbf{Im}\, f$,

$$\begin{aligned}
(a,b,c) \in \mathbf{Im}\, f &\iff c + b - a = 0 \\
&\iff a = b + c \\
&\iff (a,b,c) = (b+c, b, c) = c(1,0,1) + b(1,1,0) \\
&\iff (a,b,c) \in \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0))
\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{Im}\, f = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0))$ et les deux vecteurs (n'étant pas colinéaires) forment une base de $\mathbf{Im}\, f$.

3. Une autre façon de trouver une base de $\mathbf{Im}\, f$ est la suivante : On a d'après le cours $\mathbf{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. On a donc une famille génératrice de $\mathbf{Im}\, f$.

   D'après la réduction de Gauss précédente on voir que $f(e_1) = (1,-1,2, f(e_3) = (1,0,1)$ est une sous-famille libre maximale de $\mathbf{Im}\, f$ c'est donc une base de $\mathbf{Im}\, f$.
4. En général la première méthode pour trouver $\mathbf{Im}\, f$ donne une base plus simple (avec des vecteurs simples). Dans notre exemple, avec la première méthode nous avons trouvé dans 2. la base $((1,0,1),(1,1,0))$ et dans 3. avec la deuxième méthode nous avons trouvé la base $((1,-1,2),(1,0,1))$. Remarquons que
$$(1,-1,2) = 2(1,0,1) - (1,1,0).$$

---

version 1, April 18, 2023