N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soient

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\},\\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}. \end{aligned}$$

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer une base de F et une base de G, puis $\dim F$ et $\dim G$.
(3) Déterminer une base de $F \cap G$, puis $\dim(F \cap G)$.
(4) Montrer à l'aide la formule de Grassmann que $F + G = \mathbb{R}^3$.
(5) Déterminer un sous-espace F_1 supplémentaire à $F \cap G$ dans F.
(6) Déterminer un sous-espace G_1 supplémentaire à $F \cap G$ dans G.
(7) Montrer que la réunion des bases trouvées pour F_1, $F \cap G$ et G_1 est une base de $\mathbb{R}^3$.
(8)[Question optionnelle] Que peut-on en déduire ?

Solution de l'exercice 1. (1)
– $F \subset \mathbb{R}^3$;
– $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$;
– Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ deux vecteurs de F. On a $\lambda v + v' = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$. Comme $v, v' \in F$, on a $2x - y + z = 0$ et $2x' - y' + z' = 0$, donc

$$2(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(2x - y + z) + (2x' - y' + z') = 0$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
On montre de même que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(2) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} v \in F &\Leftrightarrow 2x - y + z = 0 \Leftrightarrow y = 2x + z\\ &\Leftrightarrow v = (x, 2x + z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)\\ &\Leftrightarrow v \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \end{aligned}$$

où $v_1 = (0, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 2, 0)$. Ainsi $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. La famille (v_1, v_2) est donc une famille génératrice de F. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille (v_1, v_2) est libre et par conséquent une base de F et $\dim F = 2$

On montre de même que $G = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$. où $v_3 = (0, -1, 1)$ et $v_4 = e_1 = (1, 0, 0)$. La famille (v_3, v_4) est une base de G et $\dim G = 2$.

(3) Clairement,

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0 \text{ et } y + z\}$$

donc

$$\begin{aligned} v = (x, y, z) \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0\\ y + z = 0 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0\\ y + z = 0 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow v = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1)\\ &\Leftrightarrow v \in \mathrm{Vect}(v_5) \end{aligned}$$

où $v_5 = (-1, -1, 1)$. Anisi $F \cap G = \mathrm{Vect}(v_5)$, la famille (v_5) est une base de $F \cap G$ et $\dim(F \cap G) = 1$.

(4) D'après la formule de Grassmann

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)\\ &= 2 + 2 - 1\\ &= 3. \end{aligned}$$

On en déduit alors $F + G = \mathbb{R}^3$.

(5) Le sous-espace F étant de dimension 2, tout sous-espace supplémentaire à $F \cap G$ (qui est de dimension 1) est alors de dimension 1. Pour déterminer un sous-espace supplémentaire de $F \cap G$ dans F, il suffit donc de compléter la base (v_5) de $F \cap G$ par un vecteur appartenant à F mais pas à $F \cap G$ pour obtenir une base de F.

On remarque que $v_1 \in F$, $v_1 \notin F \cap G$ et (v_5, v_1) est une base de F (on a complété par le vecteur v_1). Donc $F = \mathrm{Vect}(v_5) \oplus \mathrm{Vect}(v_1)$ et $F_1 = \mathrm{Vect}(v_1)$

est un sous-espace supplémentaire de $F \cap G$ dans F. A noter que F_1 n'est pas unique, on peut par exemple aussi choisir $F_1 = \mathrm{Vect}(v_2)$.

(6) On fait de même et on trouve (par exemple) que $G_1 = \mathrm{Vect}(v_4)$ est un sous-espace supplémentaire de $F \cap G$ dans G.

(7) D'après nos choix, on a $F_1 = \mathrm{Vect}(v_1)$, $G_1 = \mathrm{Vect}(v_4)$ et $F \cap G = \mathrm{Vect}(v_5)$. On vérifie facilement que la famille (v_1, v_4, v_5) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(8) On déduit de la question précédente que $F_1 \oplus (F \cap G) \oplus G_1 = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z).$$

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) Ecrire la matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}_0$.

(3) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, notée $\mathcal{B}_1$. L'application linéaire f est-elle injective ?

(4) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})$, notée $\mathcal{B}_2$.

(5) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.

(6) Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base définie par $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ (réunion des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})$).

Calculer les images des vecteurs v_1, v_2 et v_3 dans la base $\mathcal{B}$, en déduire la matrice D de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(7) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, puis calculer P^{-1}.

(8) Donner la relation qui lie A et D.

(9) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer D^n. En déduire A^n.

Solution de l'exercice 2. (1) Vérification facile.

(2) On trouve

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}\, f &\Leftrightarrow f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Après résolution du système on trouve

$$v \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. .$$

D'où $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, 1, 1)$. La famille $\mathcal{B}_1 = (v_1)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

Comme $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, l'application linéaire f n'est pas injective.

(4) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}) &\Leftrightarrow f(v) - 3v = 0_{\mathbb{R}^3}. \\ &\Leftrightarrow -x - y - z = 0 \end{aligned}$$

On trouve $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ avec $v_2 = (1, 0, -1)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$. La famille $\mathcal{B}_2 = (v_2, v_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})$.

(5) On montre facilement que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ (réunion des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$) est une base de $\mathbb{R}^3$. On donc peut conclure que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(6) Clairement $f(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(v_3) = 3v_3$ et $f(v_3) = 3v_3$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(7) La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

et son inverse est
$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(8) D'après la formule de changement de bases, on a $A = PDP^{-1}$.

(9) On a
$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \cdots \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}3^n & -\frac{1}{3}3^n & -\frac{1}{3}3^n \\ -\frac{1}{3}3^n & \frac{2}{3}3^n & -\frac{1}{3}3^n \\ -\frac{1}{3}3^n & -\frac{1}{3}3^n & \frac{2}{3}3^n \end{pmatrix} \\ &= 3^{n-1}A. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient f et g deux applications linéaires de E dans E.

(1) Montrer que si $f \circ g = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ ($\mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$ étant l'application linéaire nulle).

(2) Réciproquement, montrer que si $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$, alors $f \circ g = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$.

(3) On suppose que E est de dimension finie égale à n.

(a) Montrer que si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, alors $f \circ f = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$ et $n = 2\dim(\operatorname{Im} f)$.

(b) Réciproquement, montrer que si $f \circ f = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$ et $n = 2\dim(\operatorname{Im} f)$, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Solution de l'exercice 3. (1) Supposons $f \circ g = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $v \in \operatorname{Im} g$, donc il existe $u \in E$ tel que $v = g(u)$. Dans ces conditions $f(v) = f(g(u)) = (f \circ g)(u) = 0_E$. D'où $v \in \operatorname{Ker} f$.

(2) Réciproquement, si $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$, alors pour tout $v \in E$ on a $g(v) \in \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ et $f(g(v)) = 0_E$. Donc $(f \circ g)(v) = 0_E$ et cela pour tout $v \in E$. On conclut que $f \circ g = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$.

(3) (a) Si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ alors d'après la question (2) on a $f \circ f = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$. D'autre part, d'après le théorème du rang, on a
$$n = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = 2\dim(\operatorname{Im} f).$$

(b) Réciproquement, si $f \circ f = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$ et $n = 2\dim(\operatorname{Im} f)$ alors d'après la question (1), on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. D'autre part, le théorème du rang et l'hypothèse $n = 2\dim(\operatorname{Im} f)$ impliquent
$$\dim(\operatorname{Ker} f) = n - \dim(\operatorname{Im} f) = 2\dim(\operatorname{Im} f) - \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im} f).$$

Donc
$$\begin{cases} \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \\ \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} f) \end{cases}$$
d'où $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 4. Soit
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $A = jI_4 + j^2B$, où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ est l'unique racine 3e de l'unité dont la partie imaginaire est strictement positive.

(1) Calculer $j^2 + j + 1$ et j^3.

(2) (a) Calculer B^2, puis B^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer alors que A^2 s'écrit comme combinaison linéaire de I_4 et B.

(3) En déduire une relation entre A^2, A et I_4.

(4) La matrice A est-elle inversible ? si oui déterminer A^{-1}.

(5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Utiliser (2) et la formule du binôme de Newton pour écrire A^{2n} comme combinaison linéaire de I_4 et B.

Solution de l'exercice 4. (1) Clairement, $j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$.

(2) (a) On trouve $B^2 = I_4$ et on déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$B^k = \begin{cases} I_4 & \text{si } k \text{ est pair} \\ B & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

(b) On a $A^2 = (jI_4 + j^2B)^2 = j^2I_4 + 2j^3B + j^4B^2 = j^2I_4 + 2B + jI_4 = (j + j^2)I_2 + 2B = -I_4 + 2B$.

(3) On a $A = jI_4+j^2B$ et $A^2 = -I_4+2B$. Donc $A^2-2jA+(1 + 2j^2)\, I_4 = 0$..

(4) On déduit que $A(A-2jI_4) = (-1 - 2j^2)\, I_4$ et que $\left(\frac{-A+2jI}{1+2j^2}\right) A = I_4$. La matrice A est alors inversible et $A^{-1} = \frac{1}{1+2j^2}(-A + 2jI_4)$.

(5) De la question (2) on a $A^2 = -I + 2B$. Comme les matrices $2B$ et I_4 commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^{2n} = \left(A^2\right)^n &= (-I_4 + 2B)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2B)^k(-I_4)^{n-k} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k \binom{n}{k} B^k \end{aligned}$$

Or $B^k = I_4$ si k est pair et $B^k = B$ si k est impair. On distingue alors dans la dernière somme les termes pour les k pairs et ceux pour les k impairs, puis on trouve

$$A^{2n} = (-1)^n \left[\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} 4^p\right] I_4 - (-1)^n \left[\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} 2^{p+1}\right] B.$$