ESPACES VECTORIELS QUOTIENTS

Complément d'algèbre linéaire 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. On définit la relation suivante entre vecteurs de E

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in F$$

La relation précédente est une relation d'équivalence.

(1) elle est réflexive : $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$ car $x - x = \mathbf{0}_E \in F$;

(2) elle est symétrique : $\forall x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ alors $x-y \in F$, puis $y-x = -(x-y) \in F$ donc $y\mathcal{R}x$;

(3) elle est transfitive : $\forall x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x - y \in F$ et $y - z \in F$, donc $(x - y) + (y - z) = x - z \in F$, d'où $x\mathcal{R}z$.

Déterminons les classes d'équivalences de cette relation d'équivalence. Soit $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} && (1)\\
&= \{y \in E \mid y - x \in F\} && (2)\\
&= \{x + f \mid f \in F\} && (3)\\
&= x + F && (4)
\end{aligned}$$

Donc la classe d'équivalence de x est l'espace (affine) $x + F$ (parallèle à F).

Attention ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Un élément de $\bar{x}$ est appelé *représentant* de $\bar{x}$.

On note E/F l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$, des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$,

$$\begin{aligned}
E/F &= \{\bar{x} \mid x \in E\} && (5)\\
&= \{x + F \mid x \in E\} && (6)
\end{aligned}$$

Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$ est le plan vectoriel et $F = \mathrm{Vect}(1, 1)$ une droite vectoriel (la première bissectrice), alors E/F est l'ensemble des droites affines parallèles à F (droites ne passant pas nécessairement pas $(0, 0)$). Si on veut trouver la classe de $v = (2, 3)$, alors on doit chercher les vecteurs $u = (x, y)$ tels que $u - v \in \mathrm{Vect}(1, 1)$, c-à-d. l'ensemble des (x, y) tels que $y - x = 1$, c'est la droite affine parallèle à F

©Janvier 2018, Khalid Koufany

passant par $(2,3)$. Dans ce cas tout point de cette droite est un représentant de la classe de $(2,3)$.

On peut munir E/F d'une structure d'espace vectoriel :

(1) somme : $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$;

Montrons d'abord que cette somme est bien définie, autrement dit, $\overline{x+y}$ ne dépend pas des représentants de $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Ainsi il faut montrer que si $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$ alors $x+y\mathcal{R}x'+y'$, ce qui est simple à vérifier :

$$(x'+y') - (x+y) = (x-x') + (y-y') \in F$$

(2) multiplication scalaire : $\lambda \cdot \bar{x} = \overline{\lambda x}$

Encore une fois, cette multiplication est bien définie et ne dépend pas du représentant de $\bar{x}$, car si $x\mathcal{R}x'$ alors $\lambda x\mathcal{R}\lambda x'$, puisque $\lambda x - \lambda x' = \lambda(x-x') \in F$.

D'où la proposition :

Proposition 0.1. — *L'ensemble $(E/F, +, \cdot)$ muni des deux lois est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel*

On l'appelle **espace vectoriel quotient de l'espace vectoriel E par le sous-espace vectoriel F.**

Proposition 0.2. — *Soient F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit l'application*

$$\begin{array}{rcl} p \quad : E & \to & E/F \\ x & \mapsto & p(x) = \bar{x} \end{array}$$

(appelée la projection de E sur E/F). Alors

(1) p est une application linéaire surjective et $\mathbf{Ker}\, p = F$.

(2) Tout supplémentaire de F dans E est isomorphe E/F.

Démonstration. — (1) Il est facile de vérifier que p est linéaire. On peut aussi vérifier que $\mathbf{Ker}\, p = F$.

(2) Soit G un supplémentaire de F et considérons $p_{|G} : G \to E/F$ la restriction de p à G. C'est encore une application linéaire. De plus si $x \in E$, alors $x \in \mathbf{Ker}\, p_{|G} \iff x \in G$ et $p(x) = \bar{\mathbf{0}} \iff x \in G$ et $x \in F \iff x \in G \cap F = \{\mathbf{0}\}$. Donc $\mathbf{Ker}\, p_{|G} = \{\mathbf{0}\}$ et $p_{|G}$ est injective.

De plus, $p_{|G}$ est surjective, car si $\bar{x} \in E/F$, avec $x \in E$ et décomposons x dans $E = F \oplus G$, soit $x = x_F + x_G$. Comme $x - x_G = x_F \in F$, on a $\bar{x}_G = \bar{x}$. On en déduit que $p_{|G}$ est surjective. Ainsi $p_{|G}$ est un isomorphisme de G sur E/F.

□

Proposition 0.3. — *Soient F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors E/F est de dimension finie et*

$$\dim E = \dim F + \dim E/F$$

Démonstration. — Comme E est de dimension finie, F est de dimension finie ainsi que tout supplémentaire de F. Donc d'après la proposition précéfdente E/F est de dimension finie.

La projection canonique

$$\begin{array}{rcl} p \quad : E & \to & E/F \\ x & \mapsto & p(x) = \bar{x} \end{array}$$

est une application linéaire surjective, donc $\mathrm{rg}(p) = \dim E/F$. De plus $\mathbf{Ker}\, p = F$. Le théorème du rang entraine donc l'égalité

$$\dim E = \dim F + \dim E/F.$$

$\square$

---

version 1, May 16, 2022

COMPLÉMENT D'ALGÈBRE LINÉAIRE 1