# CHAPITRE 3
# ESPACES VECTORIELS

**Table des matières**



On note toujours $\mathbb{K}$ le corps de réels ou des complexes. On se donne un entier $n \geq 1$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'eensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

## 1. Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas son inverse est donné par :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

En effet, pour tous scalaires $a, b, c, d$, on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$$

Si $ad - bc \neq 0$, cela s'écrit $AA' = I_2$ avec $A' = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $A$ est inversible d'inverse $A'$. Réciproquement si $A$ est inversible, on a :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}\left(A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right) = (ad-bc)A^{-1}$$

donc $ad - bc \neq 0$ (puisque $A \neq 0$) et $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

***Définition 1.1.*** — *Le déterminant d'une matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ *est le scalaire :*

$$\det(A) = ad - bc$$

*Ce déterminant est aussi noté :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul. Nous généraliserons plus loin cette définition du déterminant.

Avec le théorème qui suit on résume les propriétés fondamentales du déterminant des matrices d'ordre 2.

***Théorème 1.2.*** — *On désigne par $A, B$ des matrices d'ordre 2 .*

*(1)* $\det(I_2) = 1$.

*(2) Pour tout scalaire $\lambda$, on a,* $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$.

*(3)* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

*(4) Si $A$ est inversible, alors* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

*(5) Si l'une des lignes [resp. des colonnes] de $A$ est nulle, alors* $\det(A) = 0$.

*(6) Si $A'$ est la matrice déduite de $A$ en permutant les deux lignes [resp. les deux colonnes], alors* $\det(A') = -\det(A)$.

*(7)* $\det(A) = \det(A^T)$.

*Démonstration.* — On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

(1) Il suffit de vérifier.

(2) On a $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ et:

$$\det(\lambda A) = \lambda^2 ad - bc = \lambda^2 \det(A)$$

(3) On a :

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

et:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') \\ &= aa'cb' + aa'dd' + bc'cb' + bc'dd' - ab'ca' - ab'dc' - bd'ca' - bd'dc' \\ &= aa'dd' + bc'cb' - ab'dc' - bd'ca' \\ &= ad(a'd' - b'c') - bc(a'd' - b'c') \\ &= (ad - bc)(a'd' - b'c') = \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

(4) Dans le cas où $A$ est inversible, on $AA^{-1} = I_2$ et :

$$\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = \det\left(AA^{-1}\right) = \det(I_2) = 1$$

ce qui donne $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(5) Résulte de la définition.

(6) On a $A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \left[\text{resp}\,.A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\right]$ et :

$$\det(A') = cb - ad = -\det(A).$$

(7) Il suffit de vérifer.

□

## 2. Opérations élémentaires. Matrices de dilatation et de transvection

Pour $i, j$ entiers compris entre 1 et $n$, on note $E_{ij}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice $(i, j)$ (ligne $i$ et colonne $j$ ) qui vaut 1 .

On rappelle que la famille $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est donc de dimension $n^2$.

Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$ :

$$L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

sa ligne numéro $i$ (c'est une matrice à une ligne et $n$ colonnes) et pour tout entier $j$ compris entre 1 et $n$ :

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

sa colonne numéro $j$ (c'est une matrice à $n$ lignes et une colonne). On écrira :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$

On suppose que $n \geq 2$. On appelle matrice déduite de $A$ par opération élémentaire sur les lignes de $A$

– toute matrice de la forme:

$$A_i(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ \lambda L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

avec $1 \leq i \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, c'est-à-dire que la matrice $A_i(\lambda)$ est déduite de la matrice $A$ en multipliant sa ligne numéro $i$ par $\lambda$

– ou de la forme :

$$A_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + \lambda L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

$1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire que la matrice $A_{ij}(\lambda)$ est déduite de la matrice $A$ en ajoutant à la ligne numéro $i$ la ligne numéro $j$ multipliée par $\lambda$.

On appelle matrice déduite de $A$ par opération élémentaire sur les colonnes de $A$

– toute matrice de la forme:

$$A'_j(\lambda) = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{j-1} & \lambda C_j & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix},$$

avec $1 \leq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, c'est-à-dire que la matrice $A'_i(\lambda)$ est déduite de la matrice $A$ en multipliant sa colonne numéro $j$ par $\lambda$

– ou de la forme:

$$A'_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{j-1} & C_i + \lambda C_j & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix},$$

$1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire que la matrice $A'_{ij}(\lambda)$ est déduite de la matrice $A$ en ajoutant à la colonne numéro $j$ la colonne numéro $i$ multipliée par $\lambda$.

***Définition 2.1.*** — *On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme:*

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$$

*avec* $1 \leq i \neq j \leq n$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ est donc une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux valent 1 et de termes hors de la diagonale tous nuls sauf celui d'indice $(i, j)$ (i. e. en ligne $i$ et colonne $j$) qui vaut $\lambda$.

***Définition 2.2.*** — *On appelle matrice de dilatation toute matrice de la forme:*

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$$

*avec* $1 \leq i \leq n$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est donc diagonale de termes diagonaux tous égaux à 1 sauf le numéro $i$ qui vaut $\lambda$.

***Théorème 2.3.*** — *Avec les notations qui précèdent on a :*

$$A_i(\lambda) = D_i(\lambda)A, \quad A_{ij}(\lambda) = T_{ij}(\lambda)A$$
$$A'_j(\lambda) = AD_j(\lambda), \quad A'_{ij}(\lambda) = AT_{ij}(\lambda)$$

*C'est-à-dire que:*

*(1) la multiplication à gauche par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i par $\lambda$;*

*(2) la multiplication à droite par une matrice de dilatation $D_j(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne j par $\lambda$;*

*(3) la multiplication à gauche par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne $L_i$ par $L_i + \lambda L_j$ :*

*(4) la multiplication à droite par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne $C_j$ par $C_j + \lambda C_i$.*

*Démonstration.* — Le coefficient d'indice $(p, q)$ du produit de matrices $D_i(\lambda)A$ est obtenu en faisant le produit de la ligne $p$ de $D_i(\lambda)$ par la colonne $q$ de $A$, ce qui donne en notant $\alpha_{p,q}$ ce coefficient :

$$\alpha_{p,q} = \begin{cases} a_{p,q} \text{ si } 1 \leq p \neq i \leq n, 1 \leq q \leq n \\ \lambda a_{iq} \text{ si } p = i, 1 \leq q \leq n \end{cases}$$

On a donc bien $A_i(\lambda) = D_i(\lambda)A$. Les autres égalités se montrent de façon analogue. □

Ce résultat justifie la définition suivante.

***Définition 2.4.*** — *On appelle matrice élémentaire une matrice de dilatation ou de transvection.*

***Lemme 2.5.*** — *Une matrice élémentaire est inversible avec*

$$T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$$

*pour une matrice de transvection et*

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

*pour une matrice de dilatation.*

*Démonstration.* — Pour $\lambda, \mu$ dans $\mathbb{K}$ et $i \neq j$ compris entre 1 et $n$, la matrice $T_{ij}(\lambda)T_{ij}(\mu)$ se déduit de $T_{ij}(\mu)$ en ajoutant à sa ligne $i$ sa ligne $j$ multipliée par $\lambda$, ce qui donne la matrice $T_{ij}(\lambda + \mu)$.

Prenant $\mu = -\lambda$, on a $T_{ij}(\lambda)T_{ij}(-\lambda) = T_0 = I_n$, ce qui signifie que $T_{ij}(\lambda)$ est inversible d'inverse $T_{ij}(-\lambda)$. Le deuxième résultat est évident. □

Avec l'exemple qui suit, on vérifie que toute matrice inversible d'ordre 2 est produit de matrices élémentaires. Ce résultat est en fait vrai pour les matrices inversibles d'ordre $n \geq 2$.

***Remarque 2.6.*** — *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice inversible.*

*(1) On suppose que* $c \neq 0$.

*(a) Déterminons un scalaire* $\lambda_1$ *tel que:*

$$A_1 = T_{12}(\lambda_1) A = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

*Pour tout scalaire $\lambda_1$, on a :*

$$T_{12}\left(\lambda_1\right)A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c\lambda_1 & b + d\lambda_1 \\ c & d \end{pmatrix}$$

*et prenant $\lambda_1$ tel que $a + c\lambda_1 = 1$, soit $\lambda_1 = \frac{1-a}{c}$, on a :*

$$T_{12}\left(\lambda_1\right)A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d-\det(A)}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$$

*(b) Déterminons un scalaire $\lambda_2$ tel que:*

$$A_2 = T_{21}\left(\lambda_2\right)A_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

*Pour tout scalaire $\lambda_2$, on a :*

$$T_{21}\left(\lambda_2\right)A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ c + \lambda_2 & d + b_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

*et prenant $\lambda_2 = -c$, on a :*

$$T_{21}\left(\lambda_2\right)A_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & d - cb_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d-\det(A)}{c} \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

*(c) Déterminons un scalaire $\lambda_3$ tel que:*

$$A_3 = A_2T_{12}\left(\lambda_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$$

*Pour tout scalaire $\lambda_3$, on a :*

$$A_2T_{12}\left(\lambda_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_2 + \lambda_3 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

*et prenant $\lambda_3 = -b_2$, on a :*

$$A_2T_{12}\left(\lambda_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

*(d) En déduire qu'il existe des matrices de transvection $P_1, P_2, Q_1$ et une matrice de dilatation $D$ telles que:*

$$A = P_1P_2DQ_1$$

*On a donc en définitive:*

$$T_{21}\left(\lambda_2\right)T_{12}\left(\lambda_1\right)AT_{12}\left(\lambda_3\right) = D(\det(A))$$

*et utilisant le fait que les matrices de transvections sont inversibles, on déduit que:*

$$A = T_{12}(-\lambda_1) T_{21}(-\lambda_2) D(\det(A)) T_{12}(-\lambda_3)$$
$$\text{où } \lambda_1 = \frac{1-a}{c}, \lambda_2 = -c \text{ et } \lambda_3 = \frac{\det(A)-d}{c}.$$

*(2) Si $c = 0$, on a nécessairement $a \neq 0$ puisque $A$ est inversible et :*

$$T_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b+d \end{pmatrix}$$

*ce qui nous ramène au cas précédent et donne:*

$$T_{21}(1)A = P_1 P_2 D Q_1$$

*soit:*

$$A = T_{21}(-1) P_1 P_2 D Q_1$$

De manière plus générale, on a le résultat suivant.

***Théorème 2.7.*** — *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $n \geq 2$ ) est inversible si, et seulement si, elle est produit de matrices élémentaires. Précisément si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, il existe alors des matrices de transvection $P_1, \cdots, P_r$ et $Q_1, \cdots, Q_s$ et une matrice de dilatation $D_n(\lambda)$ telles que:*

$$A = P_1 \cdots P_r D_n(\lambda) Q_1 \cdots Q_s$$

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur $n \geq 2$. Le cas $n = 2$ a été traité avec la remarque précédente. On le suppose vrai pour toutes les matrices inversibles d'ordre $n - 1 \geq 2$ et on se donne une matrice inversible $A$ d'ordre $n$.

On se ramène tout d'abord par opération élémentaire au cas où $a_{21} \neq 0$.

Si $a_{21} = 0$, comme $A$ est inversible, sa colonne 1 n'est pas nulle (cette colonne est $Ae_1$ où $e_1$ est le premier vecteur de base canonique et $x = 0$ est l'unique solution de $Ax = 0$ ), il existe donc un indice $i \in \{1, 3, \cdots, n\}$ tel que $a_{i1} \neq 0$ et la matrice $T_{2i}(1)A$ (déduite de $A$ en ajoutant la ligne $i$ à la ligne 2) est telle que son coefficient d'indice $(2, 1)$ est non nul.

Une fois ramené à $a_{21} \neq 0$, on se ramène à $a_{11} = 1$ en remplaçant la première ligne $L_1$ par $L_1 + \lambda L_2$ (multiplication à gauche par $T_{12}(\lambda)$ ) où le scalaire $\lambda$ est choisi tel que $a_{11} + \lambda a_{21} = 1$. Ensuite, pour tout $i \in \{2, 3, \cdots, n\}$, en remplaçant la ligne $L_i$ par $L_i - a_{i1} L_1$ (multiplication à gauche par $T_{i1}(-a_{i1})$), on annule le coefficient d'indice $(i, 1)$. On peut donc trouver des matrices de transvection $P_1, \cdots, P_k$ telles que :

$$P_k \cdots P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

De manière analogue, en multipliant à droite par des matrices de transvection, $Q_1, \cdots, Q_m$, on obtient :

$$P_k \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On peut alors conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence à la matrice $B$ qui est d'ordre $n-1$ et inversible. En effet, si $B$ n'est pas inversible, il existe $x' \neq 0$ dans $\mathbb{K}^{n-1}$ tel que $Bx' = 0$, donc $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ est non nul solution de $P_k \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_m x = 0$ qui équivaut à $Ay = 0$ avec $y = Q_1 \cdots Q_m x \neq 0$ puisque les matrices $P_i$ et $Q_j$ sont inversibles, en contradiction avec $A$ inversible. $\square$

Nous verrons plus loin que, comme dans le cas $n = 2$, le scalaire $\lambda$ qui intervient dans le théorème précédent est uniquement déterminé par la matrice $A$, c'est son déterminant.

Pour $n = 1$, le résultat est encore vrai avec $A = (a) = D(a)$.

## 3. Déterminants des matrices carrées

Nous avons déjà défini le déterminant d'une matrice d'ordre deux, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Une matrice d'ordre 1 étant tout simplement un réel ou un complexe, son déterminant est lui même.

***Définition 3.1.*** — *Le déterminant d'une matrice carrée $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ d'ordre $n \geq 3$ peut se définir par récurrence comme* *suit:*

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i,1}\det\left(A_{i,1}\right)$$

*où $A_{i,1}$ est, pour $i$ compris entre 1 et $n$, la matrice d'ordre $n-1$ déduite de $A$ en supprimant la première colonne et la ligne numéro $i$.*

Dans cette expression, on dit qu'on développe le déterminant suivant la première colonne. On note :

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Les lignes d'une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant notées $L_1,L_2,\cdots,L_n$, on écrira aussi :

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

***Exemple 3.2.*** — *Pour $n=3$ et $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, on a :*

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}+7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=0$$

***Exemple 3.3.*** — *Soient $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ des réels ou des complexes. Calculons le déterminant de la matrice:*

$$V\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix}$$

*Une telle matrice est dite de Vandermonde.*

*On a :*

$$\begin{aligned}\det\left(V\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\right) &= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} - \alpha_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} + \alpha_1^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \\ &= \alpha_2\alpha_3^2 - \alpha_2^2\alpha_3 - \alpha_1\left(\alpha_3^2-\alpha_2^2\right) + \alpha_1^2\left(\alpha_3-\alpha_2\right) \\ &= \alpha_2\alpha_3\left(\alpha_3-\alpha_2\right) - \alpha_1\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\left(\alpha_3+\alpha_2\right) + \alpha_1^2\left(\alpha_3-\alpha_2\right) \\ &= \left(\alpha_3-\alpha_2\right)\left(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\left(\alpha_3+\alpha_2\right)+\alpha_1^2\right) \\ &= \left(\alpha_3-\alpha_2\right)\left(\alpha_2\left(\alpha_3-\alpha_1\right)-\alpha_1\left(\alpha_3-\alpha_1\right)\right) \\ &= \left(\alpha_3-\alpha_2\right)\left(\alpha_3-\alpha_1\right)\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\end{aligned}$$

***Exemple 3.4.*** — *Calculons le déterminant de la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

*On trouve* $\det(A) = 38$.

***Théorème 3.5.*** — *Si* $A_i(\lambda)$ *est la matrice déduite de* $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ *en multipliant sa ligne* $i$ *par un scalaire* $\lambda$, *on a alors* $\det\left(A_{\mathrm{i}}(\lambda)\right) = \lambda\det(A)$, *soit :*

$$\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ \lambda L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$ c'est clair et pour $n = 2$, on a :

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda(ad-bc) = \lambda\det(A)$$

Supposons le résultat acquis pour les matrices d'ordre $n-1 \geq 2$.
Soient $A$ d'ordre $n$ et $A' = A_i(\lambda)$ déduite de $A$ en multipliant sa ligne $i$ par $\lambda$. On a alors:

$$\det\left(A'\right) = (-1)^{i+1}\lambda a_{i,1}\det\left(A_{i,1}\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}(-1)^{k+1}a_{k,1}\det\left(A'_{k1}\right)$$

la matrice $A'_{k,1}$, pour $k \neq i$, étant déduite de $A_{k,1}$ en multipliant sa ligne $i$ par $\lambda$. On a donc $\det\left(A'_{k,1}\right) = \lambda \det\left(A_{k,1}\right)$ pour $k \neq i$ et $\det\left(A'\right) = \lambda \det(A)$. □

***Corollaire 3.6.*** — *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une ligne nulle, alors* $\det(A) = 0$.
*Démonstration.* — Supposons que la ligne $i$ de $A$ soit nulle. En désignant par $A' = A_i(\lambda)$ la matrice déduite de $A$ en multipliant sa ligne $i$ par $\lambda = 0$, on a $A' = A$ et $\det(A) = \det\left(A'\right) = 0 \det(A) = 0$. □

***Corollaire 3.7.*** — *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout scalaire $\lambda$, on a* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
*Démonstration.* — En utilisant $n$ fois le théorème 3.5, on a :

$$\begin{aligned}\det(\lambda A) = \det\begin{pmatrix}\lambda L_1 \\ \lambda L_2 \\ \vdots \\ \lambda L_n\end{pmatrix} &= \lambda \det\begin{pmatrix}L_1 \\ \lambda L_2 \\ \vdots \\ \lambda L_n\end{pmatrix} \\ &= \cdots = \lambda^n \det\begin{pmatrix}L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

***Théorème 3.8.*** — *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égale au produit de ses termes diagonaux, soit :*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

*Démonstration.* — Considérons tout d'abord le cas des matrices triangulaires inférieures. On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$ c'est clair et pour $n = 2$, on a :

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = ad - 0 \cdot c = ad$$

Supposons le résultat acquis pour les matrices triangulaires inférieures d'ordre $n-1 \geq 2$ et soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

triangulaire inférieure d'ordre $n$. La matrice

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

est triangulaire inférieure de diagonale $a_{22}, \cdots a_{nn}$ et pour $i$ compris entre 2 et $n$.
En développant $\det(A)$ par rapport à la première colonne, on trouve

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1} \det(A_{1,1}) \\ &= a_{1,1} \prod_{i=2}^{n} a_{ii} \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned}$$

Pour le cas des matrices triangulaires supérieures, le cas $n = 1$ est encore évident et le cas $n = 2$ se vérifie par le calcul.

Supposant le résultat acquis au rang $n-1 \geq 2$, pour $A$ triangulaire supérieure d'ordre $n$, La matrice $A_{11}$ est triangulaire supérieure de diagonale $a_{22}, \cdots a_{nn}$ et pour $i$ compris entre 2 et $n$, les coefficients $a_{i1}$ sont nuls de sorte que :

$$\det(A) = a_{1,1} \det(A_{1,1}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

□

***Exemple 3.9.*** — *- Si $A = I_n$ est la matrice identité, on a alors* $\det(I_n) = 1$.

*- Si $A = D_i(\lambda)$ est une matrice de dilatation, on a alors* $\det(D_i(\lambda)) = \lambda$.

*- Si $A = T_{ij}(\lambda)$ est une matrice de transvection, on a alors* $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$.

***Théorème 3.10.*** — *Soient $A, A', A''$ des matrices de lignes respectives $L_i, L'_i, L''_i$ (pour $i$ compris entre 1 et $n$ ) telles que $L_i = L'_i = L''_i$ pour $i \neq k$ et $L''_k = L_k + L'_k$ où $k$ est un indice compris entre 1 et $n$. On a :*

$$\det(A'') = \det(A) + \det(A')$$

*soit:*

$$\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{k-1} \\ L_k + L'_k \\ L_{k+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{k-1} \\ L_k \\ L_{k+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{k-1} \\ L'_k \\ L_{k+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$ c'est clair et pour $n = 2$, il suffit de calculer.

Supposons le résultat acquis pour les matrices d'ordre $n-1 \geq 2$. Soient $A, A', A''$d$'$ ordre $n$ vérifiant les conditions du théorème. On a alors :

$$\det\left(A''\right) = (-1)^{k+1}\left(a_{k,1} + a'_{k1}\right)\det\left(A''_{k,1}\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det\left(A''_{i,1}\right)$$

avec $A''_{k,1} = A_{k,1} = A'_{k,1}$ et pour $i \neq k$, les matrices $A_{i,1}, A'_{i,1}, A''_{i1}$ vérifiant les hypothèses du théorème au rang $n-1$ (avec des notations évidentes), donc :

$$\begin{aligned}
\det\left(A''\right) = (-1)^{k+1}&\left(a_{k,1}\det\left(A_{k,1}\right) + a'_{k1}\det\left(A'_{k,1}\right)\right) \\
&+ \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1}\det\left(A_{i,1}\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i,1}\det\left(A'_{i,1}\right) \\
= \det(A)& + \det\left(A'\right).
\end{aligned}$$

□

Les théorèmes 3.5 et 3.10 se traduisent en disant que le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne.

***Théorème 3.11.*** — *Si $A'$ est la matrice déduite de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en permutant deux lignes, on a alors* $\det(A') = -\det(A)$, *soit :*

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ L_{\mathrm{i}} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_{\mathrm{i}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

*où les pointillés indiquent les lignes inchangées.*
*Démonstration.* — On procède par récurrence sur $n \geq 2$. Pour $n = 2$, il suffit de calculer.

Supposons le résultat acquis pour les matrices d'ordre $n - 1 \geq 2$.

La permutation de deux lignes se faisant avec un nombre impair de permutations de deux lignes successives (par exemple la permutation $(2,4)$ se fait par les trois permutations $(2,3,4) \to (3,2,4) \to (3,4,2) \to (4,3,2)$), il suffit de considérer le cas où $j = i + 1$ (montrer ce point rigoureusement). On se donne donc $A$ d'ordre $n$ et $A'$ est déduite de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en permutant les lignes $i$ et $i+1$. Pour $k \neq i$ et $k \neq i+1$, on a $a'_{k1} = a_{k,1}$ et $\det\left(A'_{k,1}\right) = -\det(A_{k,1})$ par hypothèse de récurrence, et avec

$$a'_{i,1} = a_{(i+1),1},\ a'_{(i+1),1} = a_{i,1},\ A'_{i,1} = A_{(i+1),1},\ A'_{(i+1),1} = A_{i,1}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \det(A^r) = (-1)^{i+1} a_{(i+1),1} \det\left(A_{(i+1),1}\right) + (-1)^i a_{i,1} \det(A_{i,1}) \\ - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i, k\neq i+1}}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k,1}) = -\det(A). \end{aligned}$$

□

Le résultat précédent se traduit en disant que le déterminant est une forme alternée sur les lignes.

***Corollaire 3.12.*** — *Si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deur lignes identiques, alors* $\det(A) = 0$.

*Démonstration.* — Si $L_i = L_j$ avec $i \neq j$, alors matrice $A'$ déduite de $A$ en permutant ces deux lignes est égale à $A$ et d'après le théorème 3.11 $\det(A) = -\det(A)$, donc $\det(A) = 0$. □

***Corollaire 3.13.*** — *On ne change pas la valeur d'un déterminant si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.*

*Démonstration.* — Il suffit de montrer le résultat quand on ajoute à la ligne $L_i$ la ligne $L_j$ multipliée par un scalaire $\lambda$ où $i \neq j$. Dans ce cas, on a :

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ L_i + \lambda L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

où les pointillés indiquent les lignes inchangées. □

En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice $A$, on peut se ramener à une matrice triangulaire supérieure de même déterminant que celui de $A$.

***Exemple 3.14.*** — *Calculons le déterminant de la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Les opérations* $L_2 \to L_2 - \frac{2}{5}L_1, L_3 \to L_3 + L_1, L_4 \to L_4 - \frac{1}{5}L_1$ *donnent*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & -3 & -1 & 10 \\ 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{19}{5} \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} \\ -3 & -1 & 10 \\ -\frac{14}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{19}{5} \end{vmatrix}$$

$$= 5\frac{1}{5}\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 7 & 1 & -12 \\ -3 & -1 & 10 \\ -14 & -7 & 19 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 7 & 1 & -12 \\ -3 & -1 & 10 \\ -14 & -7 & 19 \end{vmatrix}$$

*Puis les opérations* $L_2 \to L_2 + \frac{3}{7}L_1, L_3 \to L_3 + \frac{14}{7}L_1 = L_3 + 2L_1$ *donnent*

$$\det(A) = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 7 & 1 & -12 \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{34}{7} \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot 7 \cdot \frac{2}{7} \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 17 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 19 = 38$$

***Exemple 3.15.*** — *Développer le déterminant de la matrice suivante sous la forme d'un produit de facteurs linéaires en $x$*

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{pmatrix}.$$

*Les opérations $L_3 \to L_3 - L_2, L_2 \to L_2 - L_1$ (dans l'ordre indiqué) donnent*

$$\begin{aligned} \det(A(x)) &= \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+1 & x+1 & x+1 \\ x+2 & 2x+4 & 6x+12 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)(x+2) \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

*puis $L_3 \to L_3 - L_2$, $L_1 \to L_1 - (x+2)L_2$ donne:*

$$\begin{aligned} \det(A(x)) &= (x+1)(x+2) \begin{vmatrix} 0 & x+1 & 2(x+1) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -(x+1)(x+2) \begin{vmatrix} x+1 & 2(x+1) \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -3(x+1)^2(x+2) \end{aligned}$$

***Exemple 3.16.*** — *Soient $\alpha, \beta$ deux scalaires et $A(\alpha,\beta) = ((a_{ij}))_{1\le i,j\le n}$ la matrice d'ordre $n \geq 3$ définie par :*

$$\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}, \quad \begin{cases} a_{ii} = \beta, \\ a_{ij} = \alpha \text{ si } j \in \{1,2,\cdots,n\} - \{i\}. \end{cases}$$

*Calculons $\Delta(\alpha,\beta) = \det(A(\alpha,\beta))$.*

*La matrice $A(\alpha,\beta)$ est de la forme*

$$A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

*Si $\alpha = 0$, la matrice est diagonale et :*

$$\Delta(0,\beta) = \beta^n$$

*On suppose que $\alpha \neq 0$. En ajoutant les lignes 2 à $n$ à la première ligne on a :*

$$(\alpha,\beta) = (\beta+(n-1)\alpha)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

*Puis en retranchant la première ligne multipliée par $\alpha$ aux lignes 2 à $n$ on obtient:*

$$= (\beta+(n-1)\alpha)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta-\alpha \end{vmatrix}$$
$$= (\beta+(n-1)\alpha)(\beta-\alpha)^{n-1}$$

***Exemple 3.17.*** — *En admettant que $1700, 1020, 1122$ et 1309 sont tous divisibles par 17, montrer sans le calculer que le déterminant:*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

*est divisible par* $17$.

*On ne change pas la valeur de ce déterminant si on remplace la colonne 4 par $C_4 + 10C_3 + 10^2C_2 + 10^3C_1$, ce qui donne:*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 1700 \\ 1 & 0 & 2 & 1020 \\ 1 & 1 & 2 & 1122 \\ 1 & 3 & 0 & 1309 \end{vmatrix} = 17\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 2 & 60 \\ 1 & 1 & 2 & 66 \\ 1 & 3 & 0 & 77 \end{vmatrix} = 17q$$

*avec $q$ entier puisque tous les coefficients du déterminant sont entiers.*

Les théorèmes 3.5 et 3.10 et le corollaire 3.6 se traduisent aussi par le résultat suivant.

***Corollaire 3.18.*** — *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, toute matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ et toute matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$, on a :*

$$\begin{cases} \det(D_i(\lambda)A) = \det(D_i(\lambda))\det(A) = \lambda\det(A) \\ \det(T_{ij}(\lambda)A) = \det(T_{ij}(\lambda))\det(A) = \det(A) \end{cases}$$

***Théorème 3.19.*** — *Pour toute matrice inversible $A$ et toute matrice $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

*Démonstration.* — La matrice $A$ étant inversible s'écrit $A = P_1 \cdots P_r D_n(\lambda) Q_1 \cdots Q_s$ où les matrices $P_i$ et $Q_j$ sont des matrices de transvection et la matrice $D_n(\lambda)$ une matrice de dilatation (théorème 2.7). Une utilisation répétée du corollaire précédent nous donne :

$$\det(A) = \det\left(D_n(\lambda)\right) = \lambda$$

et pour toute matrice $B$ :

$$\det(AB) = \det\left(D_n(\lambda)\right)\det(B) = \det(A)\det(B)$$

□

Le résultat précédent est en fait valable pour toutes matrices $A$ et $B$. Le cas où la matrice A n'est pas inversible se traite en utilisant le résultat suivant.

***Théorème 3.20.*** — *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul et dans ce cas, on a* $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.

*Démonstration.* — Si $A$ est inversible d'inverse $A^{-1}$, on $AA^{-1} = I_n$ et le théorème précédent nous dit que $\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = \det\left(I_n\right) = 1$, donc $\det(A) \neq 0$ et $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$. La réciproque se démontre par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, le résultat est évident car $\det(a) = a$ pour tout scalaire $a$. Supposons le résultat acquis pour les matrices d'ordre $n - 1 \geq 1$ et soit $A$ d'ordre $n$ telle que $\det(A) \neq 0$. La première colonne de $A$ est nécessairement non nulle (définition du déterminant) et on peut reprendre la démonstration du théorème 2.7 pour trouver des matrices de transvection $P_1, \cdots, P_k$ telles que :

$$P_k \cdots P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $\alpha$ est un vecteur ligne à $n - 1$ composantes et $B$ une matrice carrée d'ordre $n - 1$. Comme les matrices $P_k$ sont inversibles, on a :

$$\det(A) = \det\left(P_k \cdots P_1 A\right) = \det(B)$$

et $\det(B) \neq 0$. La matrice $B$ est donc inversible, ce qui implique que $A$ est aussi inversible. En effet si $Ax = 0$, en notant $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x' \end{pmatrix}$ avec

$x_1 \in \mathbb{K}$ et $x' \in \mathbb{K}^{n-1}$, on a :

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x' & = 0 \\ \quad\quad Bx' & = 0 \end{cases}$$

ce qui entraîne $x' = 0$ et $x_1 = 0$, soit $x = 0$. La matrice $A$ est donc inversible.

□

***Théorème 3.21.*** — *Pour toutes matrices $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B).$$

*Démonstration.* — Il reste à traiter le cas où la matrice $A$ n'est pas inversible. Dans ce cas la matrice $AB$ ne peut être inversible (sinon, en notant $C$ l'inverse de $AB$, on a $(AB)C = I_n$, soit $A(BC) = I_n$ et $A$ est inversible) et on a :

$$0 = \det(AB) = \det(A)\det(B) = 0 \cdot \det(B)$$

□

L'égalité $\det(BA) = \det(B)\det(A)$ donne $\det(AB) = \det(BA)$. On peut remarquer que $\det(AB) = \det(BA)$ alors qu'en général $AB \neq BA$.

La multiplication à droite par une matrice élémentaire se traduisant par une action particulière sur les colonnes, on déduit de ce théorème et du théorème 2.3 les propriétés suivantes du déterminant.

***Corollaire 3.22.*** — *Si $A'_j(\lambda)$ est la matrice déduite de $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$ en multipliant sa colonne $j$ par un scalaire $\lambda$, on a alors* $\det\left(A'_j(\lambda)\right) = \lambda\det(A)$. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne nulle, alors* $\det(A) = 0$.

Pour l'instant, le déterminant d'une matrice se calcule en utilisant la première colonne de cette dernière. En réalité, on peut aussi utiliser la première ligne et nous en déduirons que cette première ligne ou colonne peut être remplacée par n'importe quelle autre. Précisément, on a les résultats suivants.

***Théorème 3.23.*** — *Pour toute matrice $A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a* $\det\left(A^T\right) = \det(A)$, *où $A^T$ est la matrice transposée de $A$.*

*Démonstration.* — Comme d'habitude c'est trivial pour $n = 1$. On suppose donc que $n \geq 2$. Si $A$ n'est pas inversible, il en est de même de sa transposée (en effet si $A^T$ est inversible, il en est de même de $A = (A^T)^T$) et on a alors $\det\left(A^T\right) = \det(A) = 0$. Si $A$ est inversible, elle s'écrit :

$$A = P_1 \cdots P_r D_n(\lambda) Q_1 \cdots Q_s$$

où les $P_i, Q_j$ sont des matrices de transvection et $\lambda = \det(A)$, ce qui donne :

$$A^T = Q_s^T \ldots Q_1^T D_n(\lambda)^T P_r^T \cdots P_1^T$$

les transposées de matrices élémentaires étant des matrices élémentaires de même type avec $D_n(\lambda)^T = D_n(\lambda)$, ce qui donne :

$$\det\left(A^T\right) = \det\left(D_n(\lambda)\right) = \lambda = \det(A)$$

□

De ce résultat, on déduit le développement du déterminant suivant la première ligne (pour $n \geq 2$) :

$$\det(A) = \det\left(A^T\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det\left(A_{1,j}\right)$$

où $A_{1,j}$ est la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de $A$ en supprimant la ligne 1 et la colonne j.

On en déduit alors les propriétés suivantes relatives aux colonnes, ces propriétés étant analogues à celles obtenues pour les lignes.

***Corollaire 3.24.*** — *Si $A'$ est la matrice déduite de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en permutant deux colonnes, on a alors* $\det\left(A'\right) = -\det(A)$. *Soient $A, A', A''$ des matrices de lignes respectives $C_j, C_j', C_j''$ (pour $j$ compris entre 1 et $n$ ) telles que $C_j = C_j' = C_j''$ pour $j \neq k$ et $C_k'' = C_k + C_k'$ où $k$ est un indice compris entre 1 et $n$. On a :*

$$\det\left(A''\right) = \det(A) + \det\left(A'\right)$$

*On ne change pas la valeur d'un déterminant si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.*

Ce corollaire se traduit en disant que le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne et que c'est une forme alternée sur les colonnes.

En général, pour calculer un déterminant, on essayera d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes dans le but de faire apparaître un maximum de coefficients nuls, ce qui facilitera le calcul du déterminant de la matrice obtenue.

De tout ce qui précède, on déduit les différentes formes de développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne (pour $n \geq 2$ ).

***Théorème 3.25.*** — *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{i,j}\right) \quad (1 \leq j \leq n)$$

*(développement suivant la colonne $j$) et*

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\det\left(A_{i,j}\right)\quad(1\leq i\leq n)$$

*(développement suivant la ligne $i$)*
*où $A_{ij}$ est la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de $A$ en supprimant la ligne $i$ et la colonne $j$.*
*Démonstration.* — Pour $j=1$, c'est la définition première du déterminant et pour $i=1$ c'est une conséquence immédiate de $\det\left(A^{T}\right)=\det(A)$. Fixons la colonne $j\geq 2$ et notons $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. La colonne $C_j$ s'écrit $C_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$ et en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la $j$-ième colonne, on a :

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\det\left(B_{i,j}\right)$$

où $B_{ij}$ est la matrice déduite de $A$ en remplaçant $C_j$ par $e_i$. En permutant la colonne $j$ avec la colonne $j-1$, puis $j-1$ avec $j-2,\cdots,2$ avec 1 et ensuite la ligne $i$ avec la ligne $i-1, i-1$ avec $i-2,\cdots,2$ avec 1 (on fait rien pour $i=1$ ) on aboutit à :

$$\det\left(B_{i,j}\right)=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}$$

et on a le résultat annoncé. On procède de manière analogue pour la deuxième formule. □

Avec les notations du théorème, on dit que $\det\left(A_{i,j}\right)$ est le mineur d'indice $(i,j)$ de la matrice $A$ et que $(-1)^{i+j}\det\left(A_{i,j}\right)$ est le cofacteur d'indice $(i,j)$ de $A$.
***Exemple 3.26.*** — *Soient $n\geq 2$ un entier et $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ des scalaires.*

*(1) Calculer le déterminant $\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de la matrice :*

$$V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

*Une telle matrice est dite de Vandermonde.*

*(2) À quelle condition une telle matrice est-elle inversible?*

*Pour $n = 2$, on a $\Delta(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ et pour $n = 3$, on a déjà fait le calcul.*

*(1) Le calcul de $\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ se fait par récurrence sur $n \geq 2$. En retranchant, pour $i = n, n-1, \cdots, 2$ à la ligne $i$ la ligne $i-1$ multipliée par $\alpha_1$, on obtient:*

$$\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \cdots & \alpha_n - \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 & \cdots & \alpha_n - \alpha_1 \\ \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

*soit :*

$$\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \left(\prod_{k=2}^{n} (\alpha_k - \alpha_1)\right) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2^{n-2} & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\prod_{k=2}^{n} (\alpha_k - \alpha_1)\right) \Delta(\alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

*et par récurrence:*

$$\det(A_n) = \prod_{k=2}^{n} (\alpha_k - \alpha_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n}^{n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n}^{n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

*(2) Cette matrice est inversible si, et seulement si, les $\alpha_i$ sont deux à deux distincts.*

***Exemple 3.27.*** — *Calculer le déterminant de la matrice :*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix}$$

*On a :*

$$\det(A_n) = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= n!\varDelta(1, 2, \cdots, n) = n! \prod_{1\leq j<i\leq n} (i-j) = n! \prod_{i=2}^{n} (i-1)! = \prod_{i=2}^{n} i!$$

***Exemple 3.28.*** — *Soit*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix},$$

*une matrice tridiagonale d'ordre $n \geq 3$ à coefficients réels ou complexes. Pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$, on désigne par $D_k$ le déterminant de la matrice d'ordre $k$ formée des $k$ premières lignes et $k$ premières colonnes de $A_n$ (les $D_k$ sont les déterminants extraits principaux de $A_n$).*

*(1) Exprimer, pour tout $k$ compris entre 3 et $n$, $D_k$ en fonction de $D_{k-1}$ et $D_{k-2}$.*

*(2) Calculer le déterminant de :*

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2^2 & 5 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & (n-1)^2 & 2n-1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{pmatrix}$$

*(1) En développant $D_k$ suivant la dernière ligne on a :*

$$D_k = a_k \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{k-2} & a_{k-2} & c_{k-2} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k-1} & a_{k-1} \end{vmatrix} - b_k \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & c_{k-3} & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{k-2} & a_{k-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{k-1} & c_{k-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_k D_{k-1} - b_k c_{k-1} D_{k-2}.$$

*Ce qui donne, avec les valeurs initiales $D_1 = a_1$ et $D_2 = a_1 a_2 - b_2 c_1$, un algorithme de calcul de $D_n$.*

*(2) Ona:*

$$D_n = (2n+1)D_{n-1} - n^2 D_{n-2}$$

*avec les valeurs initiales $D_1 = 2, D_2 = 6$. En calculant $D_3$ et $D_4$ on conjecture que $D_n = (n+1)$ ! Ce qui se montre par récurrence sur $n \geq 2$. C'est vrai pour $n = 2$ et le supposant acquis jusqu'au rang $n-1 \geq 2$, on a :*

$$D_n = (2n+1)n! - n^2(n-1)! = (n+1)!$$

## 4. Déterminant d'une famille de vecteurs

Étant donnée une famille $(v_j)_{1\leq j\leq n}$ de $n$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on définit le déterminant de cette famille comme le déterminant de la matrice $A$ dont les colonnes sont formées de ces vecteurs. En notant, pour $j$ compris entre 1 et $n$, $v_j = (x_{i,j})_{1\leq i\leq n}$ (vecteur colonne), on a donc :

$$\det(v_1, \cdots, v_n) = \det\left((x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\right).$$

Du théorème 3.20 on déduit le résultat suivant bien utile pour vérifier qu'un système de $n$ vecteurs dans $\mathbb{K}^n$ est libre et donc forme une base.

***Théorème 4.1.*** — *Une famille $(v_j)_{1\leq j\leq n}$ de $n$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre si, et seulement si, son déterminant est non nul.*

*Démonstration.* — En utilisant les notations qui précèdent, on note $P = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Dire que le système $(v_j)_{1\leq j\leq n}$ est libre équivaut à dire que l'unique solution $\lambda \in$ dans $\mathbb{K}^n$ du système linéaire $\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$ est $\lambda = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$, ce système s'écrivant aussi $P\lambda = 0$, cela revient à dire que la matrice $P$ est inversible, ce qui est encore équivalent à $\det(P) \neq 0$. $\square$

*version 1, February 12, 2023*

- *Url :* http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Alg-Lin-S2/