COMPLEXIFICATION D'ÉSPACES VECTORIELS

Complément d'algèbre linéaire 1

1. $\mathbb{R}$-espace vectoriel induit par un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Par restriction de la multiplication scalaire à $\mathbb{R}$, E est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 1.1. — *Si E est de dimension finie n sur $\mathbb{C}$, alors il est de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une $\mathbb{C}$-base de E, alors $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ est une $\mathbb{R}$-base de E.*

Démonstration. — Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une $\mathbb{C}$-base de E. Si x appartient à E, il existe des nombres complexes $\lambda_1 + i\mu_1, \ldots, \lambda_n + i\mu_n$ tels que

$$x = (\lambda_1 + i\mu_1)\, e_1 + \cdots + (\lambda_n + i\mu_n)\, e_n,$$

donc

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \mu_1 (ie_1) + \cdots \mu_n (ie_n)\,,$$

ce qui montre que $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ est un système $\mathbb{R}$-générateur de E. D'autre part, si

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \mu_1 (ie_1) + \cdots \mu_n (ie_n) = 0$$

alors

$$(\lambda_1 + i\mu_1)\, e_1 + \cdots + (\lambda_n + i\mu_n)\, e_n = 0$$

et donc

$$(\lambda_1 + i\mu_1) = \cdots = (\lambda_n + i\mu_n) = 0$$

ce qui implique que

$$\lambda_1 = \mu_1 = \cdots = \lambda_n = \mu_n = 0.$$

Le système $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ est $\mathbb{R}$-libre. C'est donc une $\mathbb{R}$-base de E qui est de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$. □

©May 20, 2022, Khalid Koufany

2. Complexification d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il s'agit de le complexifier c'est-à-dire de créer à partir de E un $\mathbb{C}-$ espace vectoriel.

Proposition 2.1. — *On définit sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E^2 une multiplication scalaire par des nombres complexes en posant*

$$(\lambda + i\mu)(u, v) = (\lambda u - \mu v, \lambda v + \mu u).$$

Alors E^2 devient ainsi un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Si E est de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, alors E^2 est de dimension n sur $\mathbb{C}$, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une $\mathbb{R}$-base de E, alors $((e_1, 0), \dots, (e_n, 0))$ est une $\mathbb{C}$-base de E^2.

Démonstration. — On vérifie facilement les propriétés d'espace vectoriel concernant le produit externe.

1) Distributivité par rapport aux scalaires.

$$\begin{aligned}((\lambda + i\mu) + (\nu + i\xi))(u, v) &= ((\lambda + \nu) + i(\mu + \xi))(u, v)\\ &= ((\lambda + \nu)u - (\mu + \xi)v, (\lambda + \nu)v + (\mu + \xi)u)\\ &= ((\lambda u - \mu v) + (\nu u - \xi v), (\lambda v + \mu u) + (\nu v + \xi u))\\ &= (\lambda u - \mu v, \lambda v + \mu u) + (\nu u - \xi v, \nu v + \xi u))\\ &= (\lambda + i\mu)(u, v) + (\nu + i\xi)(u, v)\end{aligned}$$

2) Distributivité par rapport aux vecteurs.

$$\begin{aligned}(\lambda + i\mu)((u, v) + (w, t)) &= (\lambda + i\mu)(u + w, v + t)\\ &= (\lambda(u + w) - \mu(v + t), \lambda(v + t) + \mu(u + w))\\ &= ((\lambda u - \mu v) + (\lambda w - \mu t), (\lambda v + \mu u) + (\lambda t + \mu w))\\ &= (\lambda u - \mu v, \lambda v + \mu u) + (\lambda w - \mu t, \lambda t + \mu w)\\ &= (\lambda + i\mu)(u, v) + (\lambda + i\mu)(w, t)\end{aligned}$$

3) Associativité.

$$\begin{aligned}(\lambda + i\mu)[(\nu + i\xi)(u, v)] &= (\lambda + i\mu)(\nu u - \xi v, \nu v + \xi u)\\ &= (\lambda(\nu u - \xi v) - \mu(\nu v + \xi u), \lambda(\nu v + \xi u) + \mu(\nu u - \xi v))\\ &= (\lambda\nu - \mu\xi)u - (\lambda\xi + \mu\nu)v, (\lambda\nu - \mu\xi)v + (\lambda\xi + \mu\nu)u)\\ &= ((\lambda\nu - \mu\xi) + i(\lambda\xi + \mu\nu)(u, v)\\ &= [(\lambda + i\mu)(\nu + i\xi)](u, v)\end{aligned}$$

4) Unité.

$$1(u, v) = (u, v)$$

D'ailleurs, quel que soit λ réel

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$$

On a également

$$i(u, v) = (-v, u)$$

Alors, on peut écrire
$$(u, v) = (u, 0) + i(v, 0).$$
Si maintenant E est de dimension n sur $\mathbb{R}$, alors E^2 est de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une $\mathbb{R}$-base de E. Si u et v sont dans E, on a
$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \quad \text{et} \quad v = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$$
puis
$$\begin{aligned}(u, v) &= (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n)\\ &= (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, 0) + i\,(\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n, 0)\\ &= (\lambda_i + i\mu_1)\,(e_1, 0) + \cdots + (\lambda_n + i\mu_n)\,(e_n, 0)\end{aligned}$$
Le système $((e_1, 0), \ldots (e_n, 0))$ est donc générateur. Par ailleurs, si l'on a
$$(\lambda_i + i\mu_1)\,(e_1, 0) + \cdots + (\lambda_n + i\mu_n)\,(e_n, 0) = 0$$
on en tire
$$(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n) = 0$$
et donc
$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n = 0.$$
Alors, puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E,
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0.$$
Donc le système est libre et $((e_1, 0), \ldots, (e_n, 0))$ est une $\mathbb{C}$-base de E^2. □

Notation. En identifiant E et $E \times \{0\}$, on a alors
$$(u, v) = u + iv.$$

---

version 1, May 20, 2022

COMPLÉMENT D'ALGÈBRE LINÉAIRE 1