Algèbre linéaire 1

Partiel du 21 Mars 2023. Durée 2h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et considérons le système linéaire

$$\begin{cases} ax + \ \ y + z = b \\ -x + by + z = c \\ \ \ x + 2y \qquad = 1 \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

(1) Résoudre le système (Σ) lorsque $a = 1$, $b = 2$ et $c = 5$.

(2) A quelle(s) condition(s) sur a, b, c le système (Σ) admet une seule solution ? Déterminer alors cette solution.

(3) A quelle(s) condition(s) sur a, b, c le système (Σ) n'admet aucune solution ?

(4) A quelle(s) condition(s) sur a, b, c le système (Σ) admet une infinité de solutions ? Déterminer alors ces solutions.

Exercice 2. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

(2) Calculer $\Delta = PDP^{-1}$ et montrer que $A = \Delta + N$.

(3) Montrer que $A = P(D + M)P^{-1}$ où

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Calculer D^k et M^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

(5) Vérifier que D et M commutent puis calculer $(D + M)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(6) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1}$.

(7) Prendre $B = D + M$ et déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3, 4), v_3 = (3, 1, 4, 2),$$

$$v_4 = (10, 4, 13, 7), v_5 = (1, 7, 8, 14).$$

et on considère $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

(1) La famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est-elle libre ? Sinon,

(a) chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs,

(b) extraire de la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ une sous-famille libre maximale,

(c) montrer que cette sous-famille libre est une base de F.

(2) Soit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

À quelle(s) condition(s) sur x, y, z, t, le vecteur v appartient-il au sous-espace vectoriel F ? En déduire l'écriture de F comme sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par une ou plusieurs équations.

(3) Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \ \begin{cases} -2x + y + 2z \qquad = 0 \\ -5x \qquad + 3z + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(4) Définir G par un système de générateurs. En déduire une base de G.

(5) Les sous-espaces F et G sont-ils en somme directe ?