Algèbre linéaire 1

Partiel du 21 Mars 2023. Durée 2h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et considérons le système linéaire

$$\begin{cases} ax + \ \ y + z = b \\ -x + by + z = c \\ \ \ x + 2y \qquad = 1 \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

(1) Résoudre le système (Σ) lorsque $a = 1$, $b = 2$ et $c = 5$.

(2) A quelle(s) condition(s) sur a, b, c le système (Σ) admet une seule solution ? Déterminer alors cette solution.

(3) A quelle(s) condition(s) sur a, b, c le système (Σ) n'admet aucune solution ?

(4) A quelle(s) condition(s) sur a, b, c le système (Σ) admet une infinité de solutions ? Déterminer alors ces solutions.

Solution de l'exercice 1. (1) Il facile de montrer (par la méthode de Gauss) qu'il y a une solution unique du système

$$\begin{cases} x + \ \ y + z = 2 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 2y \qquad = 1 \end{cases}$$

à savoir $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$.

(2) On procède à la résolution du système (Σ) par la méthode de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & b \\ -1 & b & 1 & c \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} a & 1 & \boxed{1} & b \\ -1-a & b-1 & 0 & c-b \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 1-2a & \boxed{1} & b-a \\ 0 & 2a+b+1 & 0 & a-b+c+1 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad (RJ1)$$

Si $\boxed{2a+b+1 \neq 0}$ alors

$$(RJ1) \to \begin{array}{ccc|c} 0 & 1-2a & \boxed{1} & b-a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b+c+1}{2a+b+1} \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \end{array} \to \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{b^2-ab+2b+2ac-c-1}{2a+b+1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{a-b+c+1}{2a+b+1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3b-2x-1}{2a+b+1} \end{array}$$

d'où la solution unique

$$(x, y, z) = \left(\frac{3b-2c-1}{2a+b+1}, \frac{a-b+c+1}{2a+b+1}, \frac{b^2-ab+2b+2ac-c-1}{2a+b+1} \right).$$

L'ensemble de solutions est alors

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3b-2c-1}{2a+b+1}, \frac{a-b+c+1}{2a+b+1}, \frac{b^2-ab+2b+2ac-c-1}{2a+b+1} \right) \right\}.$$

(3) Si $\boxed{2a+b+1 = 0}$ alors

$$(RJ1) \to \begin{array}{ccc|c} 0 & 1-2a & \boxed{1} & b-a \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c+1 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad (RJ2)$$

et si $\boxed{a-b+c+1 \neq 0}$, le système linéaire (Σ) n'a pas de solution et l'ensemble de solutions est

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

(3) Si $\boxed{2a+b+1 = 0}$ et $\boxed{a-b+c+1 = 0}$ alors

$$(RJ2) \to \begin{array}{ccc|c} 0 & 1-2a & \boxed{1} & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

D'où le système équivalent

$$\begin{cases} \qquad z = b - a - (1-2a)y \\ x \qquad = 1 - 2y \end{cases}$$

Donc (x, y, z) est solution si et seulement si

$$(x, y, z) = (1 - 2y, y, b - a - (1 - 2a)y)$$

D'où l'ensemble des solutions

$$\mathcal{S} = \{(1, 0, b - a) + y(-2, 1, 2a - 1) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
(2) Calculer $\Delta = PDP^{-1}$ et montrer que $A = \Delta + N$.
(3) Montrer que $A = P(D + M)P^{-1}$ où

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Calculer D^k et M^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
(5) Vérifier que D et M commutent puis calculer $(D + M)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
(6) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1}$.
(7) Prendre $B = D + M$ et déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 2. (a) L'inverse de P est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) On a

$$\Delta = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et un calcul rapide montre que $A = \Delta + N$.
(3) On remarque que $PMP^{-1} = N$, donc

$$P(D + M)P^{-1} = PDP^{-1} + PMP^{-1} = \Delta + N = A.$$

(4) On a par récurrence sur k

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

De plus $M^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et $M^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ pour tout $k \geq 2$.
(5) On a

$$DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = MD$$

Donc D et M commutent. On en déduit par la formule du binôme de Newton que

$$\begin{aligned} (D + M)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k D^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} M^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} M^1 D^{n-1} \\ &= I_3 \times D^n + nM \times D^{n-1} \\ &= D^n + nMD^{n-1} \end{aligned}$$

Or

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}MD^{n-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(D+M)^n &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(6) Pour $n = 0$ on a bien $(PBP^{-1})^0 = I_3$ et $PB^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n et montrons qu'il est vrai au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}(PBP^{-1})^{n+1} &= (PBP^{-1})(PBP^{-1})^n \\ &= (PBP^{-1})(PB^nP^{-1}) \qquad \text{par hyp. recu.} \\ &= PB(P^{-1}P)B^nP^{-1} \\ &= PBB^nP^{-1} \\ &= PB^{n+1}P^{-1}\end{aligned}$$

(7) D'après la question précédente

$$A^n = \left(P(D+M)P^{-1}\right)^n = P(D+M)^nP^{-1}$$

et d'après la question 5, on a

$$\begin{aligned}A^n &= P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ 2^n-(-1)^n & n2^{n-1}+2^n & -n2^{n-1}-2^n+(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & n2^{n-1} & -n2^{n-1}+(-1)^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs

$$v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,2,3,4), v_3 = (3,1,4,2),$$
$$v_4 = (10,4,13,7), v_5 = (1,7,8,14).$$

et on considère $F = \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5).

(1) La famille (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5) est-elle libre ? Sinon,
(a) chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs,
(b) extraire de la famille (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5) une sous-famille libre maximale,
(c) montrer que cette sous-famille libre est une base de F.

(2) Soit $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
À quelle(s) condition(s) sur x,y,z,t, le vecteur v appartient-il au sous-espace vectoriel F ? En déduire l'écriture de F comme sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par une ou plusieurs équations.

(3) Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases} -2x + y + 2z & = 0 \\ -5x + 3z + t & = 0 \end{cases}\right\}.$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(4) Définir G par un système de générateurs. En déduire une base de G.

(5) Les sous-espaces F et G sont-ils en somme directe ?

Solution de l'exercice 3. (1) Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_5$ des scalaires tels que $\sum_{j=1}^5 \lambda_j v_j = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}$. On a donc le système linéaire

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 + 10\lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 + 7\lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 + 13\lambda_4 + 8\lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 + 7\lambda_4 + 14\lambda_5 = 0 \end{cases}$$

On va procéder à la résolution de ce système par la méthode de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 13 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 5 & 16 & -5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 5 & 16 & -5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On voit clairement que le système de départ n'a pas comme solution unique la solution nulle (on a seulement trois pivots). La famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ n'est pas libre. On constate aussi d'après le dernier tableau que la sous-famille (v_1, v_2, v_3) est libre et que $v_4 = v_1 + 3v_3$ et $v_5 = 4v_2 - v_3$.

Comme $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ la famille (v_1, v_2, v_3) est génératrice dans F et par conséquent c'est une base de F.

(2) Soit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a $v \in F$ si et seulement si, il existe $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. Ceci conduit au système linéaire

$$\begin{cases} \lambda_1 & +3\lambda_2 & +3\lambda_3 & = x \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & + \ \lambda_3 & = y \\ \lambda_1 & +3\lambda_2 & +4\lambda_3 & = z \\ \lambda_1 & +4\lambda_2 & +2\lambda_3 & = t \end{cases}$$

et sa résolution avec la méthode de Gauss donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & 4 & z \\ 1 & 4 & 2 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & -2 & y-x \\ 0 & 2 & 1 & z-x \\ 0 & 3 & -1 & t-x \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 5 & x-(y-x) \\ 0 & \boxed{1} & -2 & y-x \\ 0 & 0 & 5 & (z-x)-2(y-x) \\ 0 & 0 & 5 & (t-x)-3(y-x) \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 5 & x-(y-x) \\ 0 & \boxed{1} & -2 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x-2y+z}{5} \\ 0 & 0 & 0 & (2x-3y+t)-(x-2y+z) \end{array}\right)$$

On voit donc que

$$\begin{aligned} v = (x, y, z, t) \in F &\iff (2x-3y+t)-(x-2y+z) = 0 \\ &\iff x - y - z + t = 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}.$$

(3) On a

• $G \subset \mathbb{R}^4$,

• $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0) \in G$,

• si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $v = (x, y, z, t), v' = (x', y', z', t')$ sont deux vecteurs de G, alors $\lambda v + v' = (\lambda x + x', \lambda y + y', z\lambda z + z', \lambda t + t')$. Ce vecteur est dans G si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations de G. On a

$$\begin{aligned} -2(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') &= \lambda(-2x + y + 2z) + (-2x' + y' + 2z') \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

(car v et v' sont dans G). De même,

$$-5(\lambda x + x') + 3(\lambda z + z') + (\lambda t + t') = 0.$$

Ainsi $\lambda v + v' \in G$ et G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(4) Soit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$v \in G \iff \begin{cases} -2x + y + 2z & = 0 \\ -5x \qquad + 3z + t & = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système par la méthode de Gauss. On peut remarquer qu'il est déjà sous la forme réduite de Jordan finale :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)$$

Les variables y et t sont donc des variables principales qu'on exprime en fonction des varaibles secondaires x et z sous la forme

$$y = 2x - 2z, \quad t = 5x - 3z$$

Ainsi

$$\begin{aligned} v = (x,y,z,t) \in G \iff (x,y,z,t) &= (x, 2x-2z, z, 5x-3z) \\ &= (x,2x,0,5x) + (0,-2z,z,-3z) \\ &= x(1,2,0,5) + z(0,-2,1,-3) \end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs $w_1 = (1,2,0,5), w_2 = (0,-2,1,-3)$ forment une famille génératrice de G,

$$G = \mathrm{Vect}(w_1, w_2).$$

Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille (w_1, w_2) est liber et par suite c'est une base de G.

(5) Soit $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$v = (x,y,z,t) \in F \cap G \iff \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \\ -5x + 3z + t = 0 \end{cases}$$

La résolution par la méthode de Gauss donne :

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\to \left.\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ -2 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ -2 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\to \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{array}\right.$$

D'où le système équivalent

$$\begin{cases} t = -x \\ y = -2x \\ z = 2x \end{cases}$$

Donc

$$v = (x,y,z,t) \in F \cap G \iff v = (x, -2x, 2x, -x) = x(1,-2,2,-1)$$

On en déduit que $F \cap G$ est la droite engendré par $(1,-2,2,-1)$ et que ces deux sous-espaces ne sont pas en somme directe (car $F \cap G \neq \{\mathbf{0}\}$).