

---

# FORMES LINÉAIRES ET DUALITÉ

## Complément d'algèbre linéaire 1

---

### 1. Formes linéaires, espace dual

Dans tout ce chapitre  $K$  désignera un corps commutatif et  $E$  un  $K$ -espace vectoriel (de dimension finie ou non).

**Definition 1.1.** — Soit  $E$  un  $K$  espace vectoriel.

On appelle **forme linéaire** sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $K$ .

On appelle **espace dual** de  $E$ , noté  $E^*$ , l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $E$ . Autrement dit,  $E^* = \mathcal{L}(E, K)$  et  $\varphi \in E^*$  signifie que  $\varphi : E \rightarrow K$  est une application telle que :  $\forall (x, y) \in E^2$  et  $\forall (\alpha, \beta) \in K^2$ ,  $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ .

**Exemple 1.2.** — (a) L'application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 2x + y$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^2$ .

(b) L'application  $\theta : E \rightarrow K$ ,  $x \mapsto 0$  est une forme linéaire, appelée **forme nulle** sur  $E$ .

(c) Si  $E = K[X]$  est l'espace des polynômes à coefficients dans  $K$ , alors pour tout  $a \in K$ , l'application  $P \mapsto P(a)$  est une forme linéaire sur  $E$ .

(d) Si  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  est l'espace des fonctions réelles continues sur  $[a, b]$ , alors l'application  $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$  est une forme linéaire sur  $E$ .

(e) Si  $E = \mathbf{M}_n(K)$ , alors l'application trace,  $A = (a_{ij}) \mapsto \mathbf{tr}(A) = \sum_1^n a_{ii}$  est une forme linéaire sur  $E$ .

(f) Soit  $E$  un  $K$  espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Tout élément  $x \in E$  s'écrit donc d'une manière unique sous la forme  $x = \sum_1^n \lambda_i e_i$ . Pour chaque  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'application  $e_j^* : E \rightarrow K$ ,  $x \mapsto e_j^*(x) = \lambda_j$  est une forme linéaire sur  $E$ , appelée  $j^{\text{ème}}$  **forme coordonnée** relative à la base  $\mathcal{B}$ .

D'une façon générale on a :

**Proposition 1.3.** — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ . L'application de  $K^n$  dans  $K$  qui à tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$  associe le scalaire  $\varphi(x) := \sum_1^n \lambda_j x_j$ , est une forme linéaire sur  $K^n$ .

(b) Réciproquement, pour toute forme linéaire  $\varphi$  sur  $K^n$ , il existe un unique  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$  tel que pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ , on ait  $\varphi(x) = \sum_1^n \lambda_j x_j$ .

*Démonstration.* — Le point (a) résulte d'une vérification directe.

(b) Soit  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  la base canonique de  $K^n$  et soit  $\varphi : K^n \rightarrow K$  une forme linéaire sur  $K^n$ .

Tout élément  $x \in K^n$  s'écrit d'une façon unique sous la forme  $x = \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i$  et donc  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(\epsilon_i)$ . D'où l'existence et l'unicité des  $\lambda_j := \varphi(\epsilon_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ .  $\square$

**Proposition 1.4.** — Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors son dual  $E^*$  est de dimension finie et  $\dim E^* = \dim E$ .

*Démonstration.* — En effet,  $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, K) = \dim E \times \dim K = \dim E$ .  $\square$

## 2. Hyperplans

**Definition 2.1.** — Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de  $E$ , le noyau de toute forme linéaire sur  $E$  autre que la forme nulle. Autrement dit, une partie  $H$  de  $E$  est un hyperplan de  $E$  s'il existe  $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$  tel que  $H = \mathbf{Ker}(\varphi)$ . On dit alors que la relation  $\varphi(x) = 0$  est une équation de l'hyperplan  $H$ .

**Exemple 2.2.** — (a)  $H = \{A \in \mathbf{M}_n(K); \mathbf{Tr}(A) = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbf{M}_n(K)$ .

(b)  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 3y + z = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$ .

(c)  $H = \{P \in K[X]; P(0) = 0\}$  est un hyperplan de  $K[X]$ .

**Proposition 2.3.** — Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a)  $H$  est un hyperplan de  $E$ .

(b) Il existe une droite vectorielle  $D$  de  $E$  telle que  $E = H \oplus D$ .

Si  $E$  est de dimension finie, les conditions précédentes sont équivalentes à

(c)  $\dim(H) = \dim(E) - 1$  (autrement dit,  $H$  est de codimension 1).

*Démonstration.* — (a) $\Rightarrow$ (b) : Si  $H$  est un hyperplan de  $E$ , il existe  $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$  telle que  $H = \mathbf{Ker}(\varphi)$ . Puisque  $\varphi$  n'est pas nulle, il existe  $v \in E$  tel que  $\varphi(v) \neq 0$ . Considérons la droite vectorielle  $D = Kv$  et montrons que  $E = H \oplus D$ . Soit  $x \in H \cap D$ . Il existe  $\lambda \in K$  tel que  $x = \lambda v$  et  $\varphi(x) = 0$ , donc  $\lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) = 0$ . Comme  $\varphi(v)$  est non nul, on déduit que  $\lambda = 0$  et  $x = 0$ . Ainsi  $H \cap D = \{0\}$ . Soit  $x \in E$  et montrons que  $x \in H + D$ . Soit  $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}$  et posons  $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$  qui est un élément de  $H$  puisque  $\varphi(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\varphi(v) = 0$ . D'où  $x = y + \lambda v \in H + D$ .  $\square$

**Remarque 2.4.** — Si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1}^n$  une base de  $E$ . Relativement à la base  $\mathcal{B}$  un hyperplan  $H$  de  $E$  admet une équation unique, à un

scalaire multiplicatif près, de la forme  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$  où on a noté  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées des vecteurs  $x \in E$  par rapport à  $\mathcal{B}$ .

**Corollaire 2.5.** — Deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel  $E$  sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.

*Démonstration.* — Soient  $\varphi, \phi \in E^* \setminus \{0\}$ . Supposons que  $\mathbf{Ker}(\varphi) = \mathbf{Ker}(\phi) =: H$ . Soit  $v \notin H$  (donc  $\varphi(v)$  et  $\phi(v)$  ne sont pas nuls). Posons  $\alpha = \frac{\varphi(v)}{\phi(v)}$  et montrons que  $\varphi = \alpha\phi$ . Soit  $x \in E$ , d'après la proposition précédente  $E = H \oplus Kv$ , donc  $x$  s'écrit  $x = y + \lambda v$  avec  $y \in H$  et  $\lambda \in K$ . D'où  $\varphi(x) = \varphi(y) + \lambda\varphi(v) = \lambda\varphi(v) = \lambda(\alpha\phi(v)) = \alpha(\phi(y) + \lambda\phi(v)) = \alpha\phi(x)$ . Donc  $\varphi$  et  $\phi$  sont proportionnelles.

La réciproque est immédiate. □

### 3. Base duale

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $n \geq 1$ . Nous renvoyons à l'exemple 1.2 pour la définition des formes linéaires  $e_i^*$ .

**Proposition 3.1.** — Soit  $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1}^n$  une base de  $E$ . La famille des formes coordonnées  $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i=1}^n$  est une base de l'espace dual  $E^*$ , appelée **base duale** de  $\mathcal{B}$ . De plus, pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a les relations (d'orthogonalité) de Kronecker:

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

*Démonstration.* — Par définition

$$e_i^* : E \rightarrow K, x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \mapsto e_i^*(x) = \lambda_i.$$

Donc  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$  pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Soit  $\varphi \in E^*$  et considérons la forme linéaire  $\phi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) \delta_{ij} = \varphi(e_j)$ . Les formes linéaires  $\varphi$  et  $\phi$  coïncident sur une base de  $E$  sont donc égales. Par conséquent,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$$

et la famille  $\mathcal{B}^*$  est une famille génératrice de  $E^*$ . Comme  $\dim(E^*) = \dim(E) = n$ , la famille  $\mathcal{B}^*$  est une base de  $E^*$ . □

**Corollaire 3.2.** — Soient  $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1}^n$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i=1}^n$  sa base duale, alors on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad x &= \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i, \\ \forall \varphi \in E^*, \quad \varphi &= \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*, \\ \forall f \in \mathcal{L}(E), \quad a_{ij} &= e_i^*(f(e_j)), \quad \text{où } (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f). \end{aligned}$$

**Proposition 3.3.** — (a) Si  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle sur  $E$ , il existe un vecteur  $x \in E$  (non nul) tel que  $\varphi(x) = 1$ .

(b) Si  $x$  est un vecteur de  $E$  non nul, il existe une forme linéaire  $\varphi \in E^*$  telle que  $\varphi(x) = 1$ .

*Démonstration.* — (a) Si  $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ , alors il existe  $v \in E$  tel que  $\varphi(v) \neq 0$ . Le vecteur  $x = \frac{v}{\varphi(v)}$  convient.

(b) Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$  est non nul, alors il existe  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $e_{i_0}^*(x) = x_{i_0} \neq 0$ . La forme linéaire  $\varphi = \frac{1}{e_{i_0}^*(x)} e_{i_0}^*$  convient.  $\square$

**Proposition 3.4.** — Toute base de  $E^*$  est la base duale d'une unique base de  $E$ , appelée **base préduale**

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{F} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  une base de  $E^*$ . L'application  $\Phi : x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  de  $E$  dans  $K^n$  est linéaire. Soit  $x \in \mathbf{Ker}(\Phi)$ , donc  $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0$ . Si  $x$  n'est pas nul, alors d'après la proposition précédente, il existe  $\varphi \in E^*$  telle que  $\varphi(x) = 1$ . Cette forme linéaire s'écrit dans la base  $\mathcal{F}$  sous la forme  $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$ . Par conséquent  $1 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x) = 0$  ce qui est absurde. On en déduit que  $x = 0$ , que le noyau de  $\Phi$  est réduit à  $\{0\}$  et que  $\Phi$  est injective. Comme  $\dim(E^*) = n = \dim(K^n)$ , l'application  $\Phi$  est un isomorphisme.

Notons  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  la base canonique de  $K^n$ . Pour tout  $j$ , un vecteur  $e$  vérifie  $\varphi_i(e) = \delta_{ij}$  pour tout  $i$  si, et seulement si  $\Phi(e) = \epsilon_j$ . Puisque  $\Phi$  est un isomorphisme, la famille  $\mathcal{B} = (\Phi^{-1}(\epsilon_1), \dots, \Phi^{-1}(\epsilon_n))$  est une base de  $E$  et c'est la seule famille de  $E$  satisfaisant aux conditions de Kronecker. Par conséquent,  $\mathcal{B}$  est l'unique base de  $E$  dont  $\mathcal{F}$  est la base duale.  $\square$

**Proposition 3.5 (Changement de base duale).** — Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$ , et soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$ . Alors la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1^*$  à  $\mathcal{B}_2^*$  est  ${}^t P^{-1}$ .

*Démonstration.* — Posons  $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$  et  $P = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , puis notons  $Q = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1^*$  à  $\mathcal{B}_2^*$ . Par définition de la matrice de passage on a pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_k = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell k} e_\ell$  et pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_j^* = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^*$ . Donc pour tout  $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \delta_{jk} = f_j^*(f_k) &= \left( \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^* \right) \left( \sum_{\ell=1}^n a_{\ell k} e_\ell \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^n b_{ij} a_{\ell k} \delta_{i\ell} \\ &= \sum_{i=1}^n b_{ij} a_{ik} \\ &= ({}^t Q P)_{jk}. \end{aligned}$$

Donc  ${}^t Q P = I_n$  et  $Q = {}^t P^{-1}$ .  $\square$

**Corollaire 3.6 (Calcul pratique de la base duale).** — Soient  $\mathcal{B}_0 = (e_i)_{i=1}^n$  la base canonique de  $E$  et  $\mathcal{B}_0^* = (e_i^*)_{i=1}^n$  sa base duale. Soit  $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1}^n$  une autre base de  $E$  et  $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i=1}^n$  sa base duale. Les vecteurs  $v_i$  (respectivement  $v_i^*$ ) étant exprimés dans la base  $\mathcal{B}_0$  (respectivement  $\mathcal{B}_0^*$ ). Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0^*}(\mathcal{B}^*) = {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}))^{-1}.$$

**Exemples 3.7.** — (a) Soient les vecteurs  $v_1 = (-3, -1, 1)$ ,  $v_2 = (5, 2, -1)$ ,  $v_3 = (6, 2, -1)$  de  $\mathbb{R}^3$  exprimés dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$ . La famille  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , puisque la matrice  $P = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  est inversible (de déterminant -1). Déterminons sa base duale.

Soit  $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  la base duale de  $\mathcal{B}$ . Alors la matrice de passage de  $\mathcal{B}_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  (matrice duale de la matrice canonique) à  $\mathcal{B}^*$  est

$${}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conclue donc que

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) &= y + 2z \\ \varphi_2(x, y, z) &= -x + 3y \\ \varphi_3(x, y, z) &= x - 2y + z \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \varphi_1 &= e_2^* + 2e_3^* \\ \varphi_2 &= -e_1^* + 3e_2^* \\ \varphi_3 &= e_1^* - 2e_2^* + e_3^* \end{cases}$$

(b) Soient

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) &= x + 2y + 3z \\ \varphi_2(x, y, z) &= 2x + 3y + 4z \\ \varphi_3(x, y, z) &= 3x + 4y + 6z \end{cases}$$

trois formes linéaires sur  $\mathbb{R}^3$ . Dans la base  $\mathcal{B}_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  elles s'écrivent

$$\begin{cases} \varphi_1 &= e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^* \\ \varphi_2 &= 2e_1^* + 3e_2^* + 4e_3^* \\ \varphi_3 &= 3e_1^* + 4e_2^* + 6e_3^* \end{cases}$$

La famille  $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  est bien une base de  $(\mathbb{R}^3)^*$  puisque la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

est inversible. Soit  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  la base de  $\mathbb{R}^3$  dont  $\mathcal{F}$  est la base duale. La matrice de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}$  est donc

$${}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conclue donc que  $v_1 = (-2, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 3, -2)$  et  $v_3 = (1, -2, 1)$ .

**Compétence visée.**

Savoir déterminer une base duale d'une base donnée de  $E$ , ou une base préduale d'une base donnée de  $E^*$ .

**4. Bidual d'un espace vectoriel**

**Definition 4.1.** — Soit  $E$  un espace vectoriel. Le dual de  $E^*$ , noté  $E^{**}$  est appelé **bidual** de  $E$ .

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E &\rightarrow E^{**} \\ x &\mapsto \tilde{x} : E^* \rightarrow K \\ &\quad \varphi \mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

$\Phi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En effet, la linéarité est facile à démontrer. Soit  $x \in \mathbf{Ker}(\Phi)$ , alors  $\varphi(x) = 0$  pour tout  $\varphi \in E^*$ . On en déduit d'après la Proposition 3.3 que  $x = 0$ . Donc  $\Phi$  est injectif et comme  $E$ ,  $E^*$  et  $E^{**}$  ont la même dimension,  $\Phi$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $E^{**}$ .

Cet isomorphisme permet d'identifier le bidual  $E^{**}$  à  $E$ .