Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3,\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3,\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

(c) Quelle relation lie les matrices A, D, P, P^{-1} ?

(d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que $A^2 = 0$.

(b) Sans faire de calcul, expliquez pourquoi f n'est pas injectif.

(c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Trouver un vecteur $v_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(v_0) \neq 0$.

(e) Montrer que la famille $(v_0, f(v_0))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

(f) Compléter par un vecteur $w_0 \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $(v_0, f(v_0), w_0)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

(g) Écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que $A^2 \neq 0$, $A^3 = 0$.

(b) Trouver un vecteur v_0 tel que $f^2(v_0) \neq 0$.

(c) Montrer que la famille $\mathcal{B} := (v_0, f(v_0), f^2(v_0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) Écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 4. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans lui même dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Soit (x, y, z) un vecteur de $\mathbb{R}^3$ écrit dans la base canonique. Calculer $f(x, y, z)$.

(b) Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Choisir un vecteur v_1 non nul de $\mathrm{Ker}(f)$, et choisir dans $\mathrm{Im}(f)$ un vecteur v_2 tel que $f(v_2) \neq v_2$.
On pose $v_3 = (f - \mathrm{id})(v_2)$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est la matrice B de f dans cette base ?

(d) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $A^n = (n-1)A^2 + (2-n)A$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Soit (x, y, z) un vecteur de $\mathbb{R}^3$ écrit dans la base canonique. Calculer $f(x, y, z)$.

(b) Montrer que $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 dont on déterminera un vecteur générateur u.

(c) Soient $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$.

(d) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.

(f) Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(g) Donner la relation entre A, P et D.

Exercice 6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soient les vecteurs $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3,\ e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3,\ e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une case de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.

(c) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(d) Donner le lien entre A, B et P.

(e) Calculer B^4.

(f) En déduire A^{4n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x, y, z) = (3x + y + z, 2x + 3y + 2z, -2x - y)$$

et soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_0$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$v_1 = (0, 1, -1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 1, -1)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.
(d) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$. En déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Quelle est la relation qui lie A et D ?
(f) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, -3)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.
(d) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$. En déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Quelle est la relation qui lie A et D ?
(f) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x, y, z) = (x - 2y - 2z, 2x + y + 2z, -2x + 2y + z)$$

et soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_0$.
(b) Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Idf})$, $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Idf})$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Idf})$ sont tous de dimension 1.
(c) Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Idf}) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Idf}) = \mathrm{Vect}(v_2)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Idf}) = \mathrm{Vect}(v_3)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.
(d) Ecrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Quelle est la relation qui lie A et D ?
(f) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.
(d) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$. En déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Quelle est la relation qui lie A et D ?
(f) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. **Partie 1** On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice, dans la base naturelle, s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 16 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
(b) Calculer la matrice $(M - I)^2$, vérifier qu'elle est de rang 1.
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$.
(c) Choisir un vecteur v_2 qui est dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ mais pas dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
On pose $v_3 = f(v_2) - v_2$.
Choisir un vecteur v_4 tel que (v_2, v_3, v_4) soit une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$.
(d) Choisir une vecteur v_1 de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
Écrire la matrice N de f dans cette base.
(e) Montrer que $(N - I)^3 = (N - I)^2$; puis montrer que $(\forall n \geq 3, (M - I)^{n+1} = (M - I)^n$.

Partie 2 (CPU) On considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$(\alpha) \qquad \mathrm{rang}(g - \mathrm{Id})^2 = 1 \text{ et } \mathrm{rang}(g - \mathrm{Id}) \neq 1.$$
$$(\beta) \qquad \mathrm{rang}(g - 2\mathrm{Id}) = 3.$$

(a) Montrer que $(g - \mathrm{Id})$ n'est pas inversible.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2 \cap \mathrm{Ker}(g-2\mathrm{Id}) = \{0\}$.

(c) Montrer que $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$ et $\mathrm{Ker}(g-2\mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$ contient $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$, et que ces deux sous-espaces sont distincts.

(e) Soit w_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(g-2\mathrm{Id})$. Soit w_2 un vecteur de $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$, qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$. On pose $w_3 = (g-\mathrm{Id})(w_2)$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ de la forme (w_1, w_2, w_3, w_4).

(f) Montrer que dans une telle base la matrice de g est de la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\delta = 1$, et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$.

(g) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de g est la N de la Partie 1.

Exercice 12. (Examen 2021/22) On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Un vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$ écrit dans cette base sera noté $v = (x, y, z, t)$. Soit f l'application

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto (-4x-4y+2z, 3x+2y-3z, -2x+4z, x-z+2t) \end{aligned}$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
(2) Ecrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}_0$.
(3) (a) Déterminer le rang de A. En déduire
(b) que A n'est pas inversible ;
(c) la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
(4) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
(5) Calculer A^2, en déduire une base (v_1, v_2) de $\mathrm{Ker}(f^2)$ telle que v_1 soit dans $\mathrm{Ker}(f)$.
(6) Déterminer une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.
(7) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(8) Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
(9) Ecrire (avec un minimum de calculs) la matrice $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.
(10) Montrer que $N^3 - 2N^2 = 0$.
(11) Donner la relation qui lie A, N, P et P^{-1} où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.
(12) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, $A^n = 2^{n-2}A^2$.

Exercice 13. (Examen 2021/22) Soit $n \geq 3$ un entier. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n et soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $f(P)$ le polynôme donné par

$$f(P)(X) = (X-a)\,[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)].$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) Soit la famille de polynômes

$$P_0(X) = 1,\ P_1(X) = X-a,\ P_2(X) = (X-a)^2, \cdots, P_n(X) = (X-a)^n.$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(3) Calculer $f(P_0)$, $f(P_1)$, $f(P_2)$ puis $f(P_k)$ pour tout entier k entre 3 et n.
(4) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
(5) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(6) En déduire $\dim \mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
(7) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_n[X]$.