Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3,\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3,\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

(c) Quelle relation lie les matrices A, D, P, P^{-1} ?

(d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 1. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que $A^2 = 0$.

(b) Sans faire de calcul, expliquez pourquoi f n'est pas injectif.

(c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Trouver un vecteur $v_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(v_0) \neq 0$.

(e) Montrer que la famille $(v_0, f(v_0))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

(f) Compléter par un vecteur $w_0 \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $(v_0, f(v_0), w_0)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

(g) Écrire la matrice de f dans cette base.

Solution de l'exercice 2.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que $A^2 \neq 0,\ A^3 = 0$.

(b) Trouver un vecteur v_0 tel que $f^2(v_0) \neq 0$.

(c) Montrer que la famille $\mathcal{B} := (v_0, f(v_0), f^2(v_0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) Écrire la matrice de f dans cette base.

Solution de l'exercice 3.

Exercice 4. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans lui même dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Soit (x, y, z) un vecteur de $\mathbb{R}^3$ écrit dans la base canonique. Calculer $f(x, y, z)$.

(b) Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Choisir un vecteur v_1 non nul de $\mathrm{Ker}(f)$, et choisir dans $\mathrm{Im}(f)$ un vecteur v_2 tel que $f(v_2) \neq v_2$.
On pose $v_3 = (f - \mathrm{id})(v_2)$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est la matrice B de f dans cette base ?

(d) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $A^n = (n-1)A^2 + (2-n)A$.

Solution de l'exercice 4.

Exercice 5. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Soit (x, y, z) un vecteur de $\mathbb{R}^3$ écrit dans la base canonique. Calculer $f(x, y, z)$.

(b) Montrer que $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 dont on déterminera un vecteur générateur u.

(c) Soient $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$.

(d) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.

(f) Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(g) Donner la relation entre A, P et D.

Solution de l'exercice 5.

Exercice 6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soient les vecteurs $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.
(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une case de $\mathbb{R}^3$.
(b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.
(c) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.
(d) Donner le lien entre A, B et P.
(e) Calculer B^4.
(f) En déduire A^{4n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 6.

Exercice 7. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (e'_1, e'_2)$ respectives est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Soient les vecteurs

$$\varepsilon_1 = e_2 + e_3,\ \varepsilon_2 = e_3 + e_1,\ \varepsilon_3 = e_1 + e_2,$$

$$\varepsilon'_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2),\ \varepsilon'_2 = \frac{1}{2}(e'_1 - e'_2).$$

(a) Montrer que $\mathcal{F}_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base que $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{F}_2 = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$ est une base que $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{F}_3$ puis la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{F}_2$.
(c) Quels est la matrice B de f dans les bases $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_2$.
(d) Quelle relation lie les matrices A, B, P et Q ?

Solution de l'exercice 7.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x, y, z) = (3x + y + z, 2x + 3y + 2z, -2x - y)$$

et soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_0$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$v_1 = (0, 1, -1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 1, -1)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.
(d) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$. En déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Quelle est la relation qui lie A et D ?
(f) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 8. $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 3v_3$.

Exercice 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, -3)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.
(d) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$. En déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Quelle est la relation qui lie A et D ?
(f) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 9. $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = 4v_2$, $f(v_3) = v_3$.

Exercice 10. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x, y, z) = (x - 2y - 2z, 2x + y + 2z, -2x + 2y + z)$$

et soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_0$.
(b) Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Idf})$, $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Idf})$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Idf})$ sont tous de dimension 1.
(c) Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Idf}) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Idf}) = \mathrm{Vect}(v_2)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Idf}) = \mathrm{Vect}(v_3)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.

(d) Ecrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Quelle est la relation qui lie A et D ?
(f) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 10. $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.
(d) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$. En déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Quelle est la relation qui lie A et D ?
(f) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 11. $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = -v_2$, $f(v_3) = v_3$

Exercice 12. **Partie 1** On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice, dans la base naturelle, s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 16 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
(b) Calculer la matrice $(M - I)^2$, vérifier qu'elle est de rang 1.
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$.
(c) Choisir un vecteur v_2 qui est dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ mais pas dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
On pose $v_3 = f(v_2) - v_2$.
Choisir un vecteur v_4 tel que (v_2, v_3, v_4) soit une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$.
(d) Choisir une vecteur v_1 de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
Écrire la matrice N de f dans cette base.
(e) Montrer que $(N - I)^3 = (N - I)^2$; puis montrer que $(\forall n \geq 3, (M - I)^{n+1} = (M - I)^n$.

Partie 2 (CPU) On considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$(\alpha) \qquad \mathrm{rang}(g - \mathrm{Id})^2 = 1 \ \text{ et } \ \mathrm{rang}(g - \mathrm{Id}) \neq 1.$$
$$(\beta) \qquad \mathrm{rang}(g - 2\mathrm{Id}) = 3.$$

(a) Montrer que $(g - \mathrm{Id})$ n'est pas inversible.
(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2 \cap \mathrm{Ker}(g - 2\mathrm{Id}) = \{0\}$.
(c) Montrer que $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2$ et $\mathrm{Ker}(g - 2\mathrm{Id})$ sont supplémentaires.
(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})^2$ contient $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$, et que ces deux sous-espaces sont distincts.
(e) Soit w_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(g - 2\mathrm{Id})$. Soit w_2 un vecteur de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})^2$, qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$. On pose $w_3 = (g - \mathrm{Id})(w_2)$.
Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ de la forme (w_1, w_2, w_3, w_4).
(f) Montrer que dans une telle base la matrice de g est de la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\delta = 1$, et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$.
(g) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de g est la N de la Partie 1.

Solution de l'exercice 12.

Exercice 13. (Examen 2021/22) On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Un vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$ écrit dans cette base sera noté $v = (x, y, z, t)$. Soit f l'application

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ & (x, y, z, t) \mapsto (-4x - 4y + 2z, 3x + 2y - 3z, -2x + 4z, x - z + 2t) \end{aligned}$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
(2) Ecrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}_0$.
(3) (a) Déterminer le rang de A. En déduire
  (b) que A n'est pas inversible ;
  (c) la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
(4) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
(5) Calculer A^2, en déduire une base (v_1, v_2) de $\mathrm{Ker}(f^2)$ telle que v_1 soit dans $\mathrm{Ker}(f)$.
(6) Déterminer une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
(7) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(8) Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

(9) Ecrire (avec un minimum de calculs) la matrice $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

(10) Montrer que $N^3 - 2N^2 = 0$.

(11) Donner la relation qui lie A, N, P et P^{-1} où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

(12) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, $A^n = 2^{n-2}A^2$.

Solution de l'exercice 13. (1) Il est facile de montrer que f est linéaire. De plus $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

(2) On a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) (a) L'algorithme de Gauss

$$\begin{matrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \boxed{2} \end{matrix} \to \begin{matrix} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \end{matrix} \to \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \end{matrix}$$

montre que $\mathrm{rang}(A) = 3$ (nombre de pivots).

(b) Comme ce rang n'est pas égal à 4 (n'est pas maximal) la matrice A n'est pas inversible.

(c) Comme $\mathrm{rang}(A) = 3$, on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ et d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 3 = 1$.

(4) Cherchons une base de chacun des sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$.
Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$.
On a

$$v = (x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{cases} -4x - 4y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + 4z = 0 \\ 2t + x - z = 0 \end{cases}$$

D'après l'algorithme de Gauss développé à la question (3)(a) on trouve

$$\left.\begin{matrix} -4 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \to \left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} v = (x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff x = 2z, y = -\frac{3}{2}, t = -\frac{1}{2}z \\ &\iff v = z\left(2, -\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \frac{z}{2}(4, -3, 2, -1). \end{aligned}$$

Le vecteur non nul $v_1 = (4, -3, 2, -1)$ engendre $\mathrm{Ker}(f)$, il forme donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ (ce qui est cohérent avec $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$).

(5) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 12 & 0 \\ 0 & -8 & -12 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Il est claire que cette matrice est de rang 2 (les trois premières lignes sont colinéaires), donc $\dim \mathrm{Ker}(f^2) = 4 - 2 = 2$.

Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$.
On a

$$v = (x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f^2) \iff \begin{cases} 8y + 12z = 0 \\ 4t - 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à

$$\begin{aligned} v = (x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f^2) &\iff y = -\frac{3}{2}, t = -\frac{1}{2}z \\ &\iff v = x(1,0,0,0) + \frac{z}{2}(0-3,2,-1) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f^2) &= \mathrm{Vect}((1,0,0,0), (0-3,2,-1)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,0,0), 4(1,0,0,0) + (0-3,2,-1)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,0,0), (4-3,2,-1)) \end{aligned}$$

Si on pose $v_1 = (4, -3, 2, -1)$ et $v_2 = (1, 0, 0, 0)$, alors la famille (v_1, v_2) est génératrice dans $\mathrm{Ker}(f^2)$ et comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathrm{Ker}(f^2)$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$. De plus $v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ d'après la question (4).

(6) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f - 2\mathrm{Id}) = A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est claire que cette matrice est de rang 2, donc $\dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = 4 - 2 = 2$.
On raisonne comme dans la question (4) ou (5) pour déterminer un système générateur de $\dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. On trouve

$$\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

On pose $v_3 = (1,-1,1,0)$ et $v_4 = (0,0,0,1)$. La famille (v_3, v_4) engendre $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ et comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, cette famille est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.

(7) On montre sans difficulté (utilisez l'algorithme de Gauss) que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est libre et maximale dans $\mathbb{R}^4$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

(8) Pour montrer que $\mathrm{Im}(f-2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$, il suffit de montrer que

D'après la question précédente, la concaténation (v_1, v_2, v_3, v_4) de la base (v_1, v_2) de $\mathrm{Ker}(f^2)$ et la base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f-2\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(9) On a :

- $v_3, v_4 \in \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$, donc $f(v_3) = 2v_3$ et $f(v_4) = 2v_4$.
- $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f^2)$ avec $v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(v_1) = 0$. Calculons maintenant $f(v_2)$: rappelons que $v_2 = (1,0,0,0) = e_1$, donc $f(v_2) = f(e_1) = (-4,3,-2,1) = -v_1$.

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(10) On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Donc $N^3 - 2N^2 = 0$.

(11) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$. D'après la formule de changement de bases, $A = PNP^{-1}$.

(12) On a

$$\begin{aligned} A^3 = (PNP^{-1})^3 &= PN^3P^{-1} \\ &= P(2N^2)P^{-1} = 2P(N^2)P^{-1} = 2(PNP^{-1})^2 = 2A^2. \end{aligned}$$

A partir de cette relation, on montre par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$, $A^n = 2^{n-2}A^2$. Les détails est laissés au lecteur.

Exercice 14. (Examen 2021/22) Soit $n \geq 3$ un entier. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n et soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $f(P)$ le polynôme donné par

$$f(P)(X) = (X-a)\left[P'(X) + P'(a)\right] - 2[P(X) - P(a)].$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) Soit la famille de polynômes

$$P_0(X) = 1,\ P_1(X) = X-a,\ P_2(X) = (X-a)^2, \cdots, P_n(X) = (X-a)^n.$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(3) Calculer $f(P_0)$, $f(P_1)$, $f(P_2)$ puis $f(P_k)$ pour tout entier k entre 3 et n.
(4) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
(5) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(6) En déduire $\dim \mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
(7) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_n[X]$.

Solution de l'exercice 14. (1) Pour tous réels α, β et pour tous polynômes P_1, P_2 de $\mathbb{R}_[X]$,

$$\begin{aligned} f(\alpha P_1 + \beta P_2) =&(X-a)\left[(\alpha P_1 + \beta P_2)'(X) + (\alpha P_1 + \beta P_2)'(a)\right] \\ &- 2\left[(\alpha P_1 + \beta P_2)(X) - (\alpha P_1 + \beta P_2)(a)\right] \\ =&\alpha\left[(X-a)(P_1'(X) + P_1'(a)) - 2(P_1(X) - P_1(a))\right] \\ &+ \beta\left[(X-a)(P_2'(X) + P_2'(a)) - 2(P_2(X) - P_2(a))\right] \\ =&\alpha f(P_1) + \beta f(P_2) \end{aligned}$$

Comme il est clair que $f(P)$ est encore un polynôme de degré $\leq n$. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Pour tout entier k, le degré de $P_k = (X-a)^k$ est égal à k. La famille $\mathcal{B} = (P_0, \cdots, P_n)$ est une famille de polynômes dont la suite des degrés est strictement croissante. Elle est libre.

Puisque son cardinal est $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, la famille $\mathcal{B}$ est libre et maximale dans $\mathbb{R}_n[X]$: c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(3) Calculons $f(P_k)$, où $P_k(X) = (X-a)^k$.

$$\begin{aligned} f(P_0) &= 0 \\ f(P_1) &= 2(X-a) - 2(X-a) = 0 \\ f(P_2) &= 2(X-a)^2 - 2(X-a)^2 = 0 \\ f(P_3) &= 3(X-a) \times (X-a)^2 - 2(X-a)^3 = (X-a)^3 \end{aligned}$$

et pour tout $k \geq 3$,

$$f(P_k) = k(X-a) \times (X-a)^{k-1} - 2(X-a)^k = (k-2)(X-a)^k$$

(4) D'où la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & 2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & n-2 \end{pmatrix}$$

(5) Comme $f(P_0) = f(P_1) = f(P_2) = 0$ et

$$\forall k \geq 3, \quad f(P_k) = (k-2)P_k$$

il en découle que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\left(f(P_0), f(P_1), \cdots, f(P_n)\right) = \operatorname{Vect}\left(f(P_3), \cdots, f(P_n)\right) \\ &= \operatorname{Vect}(P_3, \cdots, P_n) \end{aligned}$$

Pour des raisons de degré, la famille $(P_3, \cdots, P_n)$ est libre. Etant génératrice de $\operatorname{Im} f$, $(P_3, \ldots P_n)$ est une base de $\operatorname{Im} f$. Donc la dimension de $\operatorname{Im} f$ est $n+1-3 = n-2$.

(6) On déduit que $\dim(\operatorname{Ker} f) = n+1-\dim(\operatorname{Im} f) = n+1-n+2 = 3$. Comme $P_0, P_1, P_2 \in \operatorname{Ker} f$ et compte tenu de la dimension de $\operatorname{Ker} f$, la famille (P_0, P_1, P_2) est donc une base de $\operatorname{Ker} f$.

(7) La réunion de deux bases (P_0, P_1, P_2) et $(P_3, \cdots, P_n)$ étant une base de E (d'après la question (3)), on conclut que les sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_n[X]$.